


Biblioteca
UNIVERSIDAD D SEVILLA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
601280236

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-49.3

EJECUTADO

VARIANTE DEL MODELO M-49.1, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, SIENDO EL DODECAEDRO ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS, Y EL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚCLEO, DE CARAS MACIZAS

Radio de la esfera que pasa por los vértices:

$r' = 110$ m m.

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 49.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M - 49.1, de igual forma y dimensiones, siendo el dodecaedro estrellado, de caras vaciadas, y el dodecaedro regular convexo del núcleo, de caras macizas.

Las dimensiones de los poliedros componentes de este modelo, son iguales a las del M - 49.1, siendo necesarias para su construcción las siguientes piezas.

A) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES PENTAGONALES RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN AL DODECAEDRO ESTRELLADO. 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

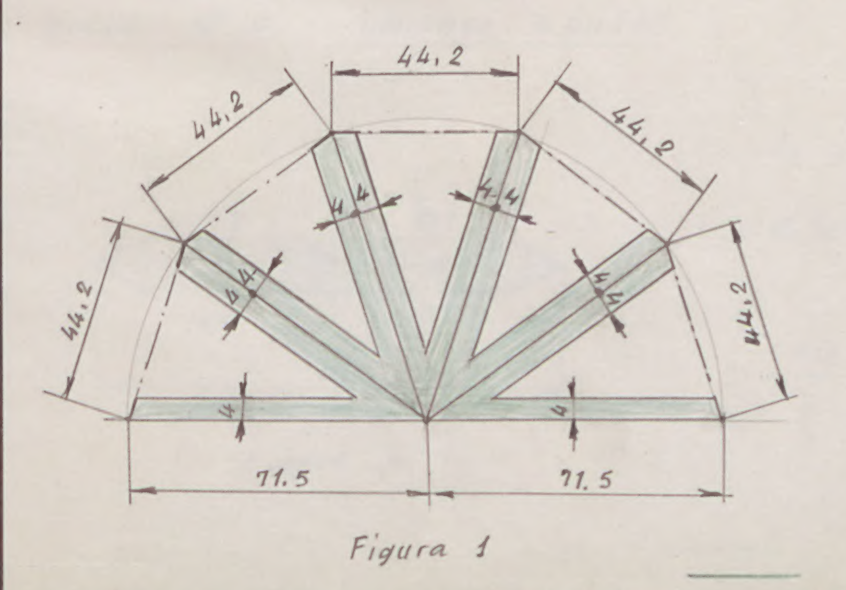


Figura 1

Alvarez Enero 1980

Modelo M- 49.3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

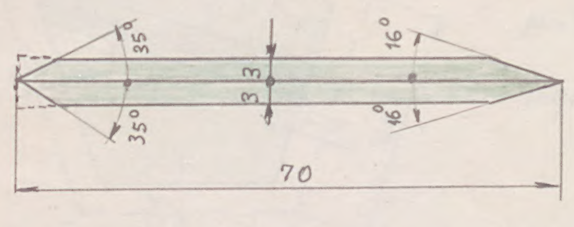


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚCLEO, CON SUS CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

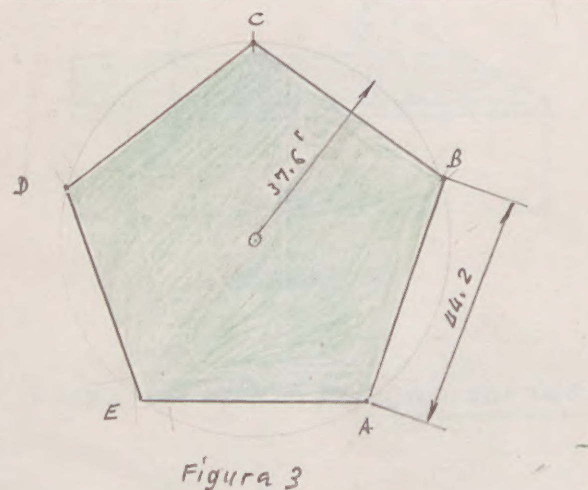


Figura 3

Son pentágonos regulares que se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

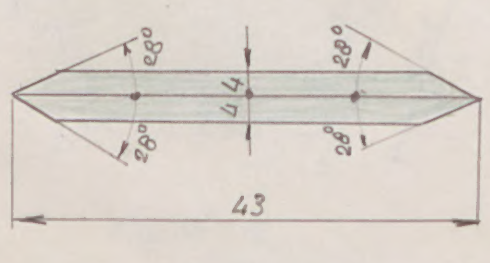


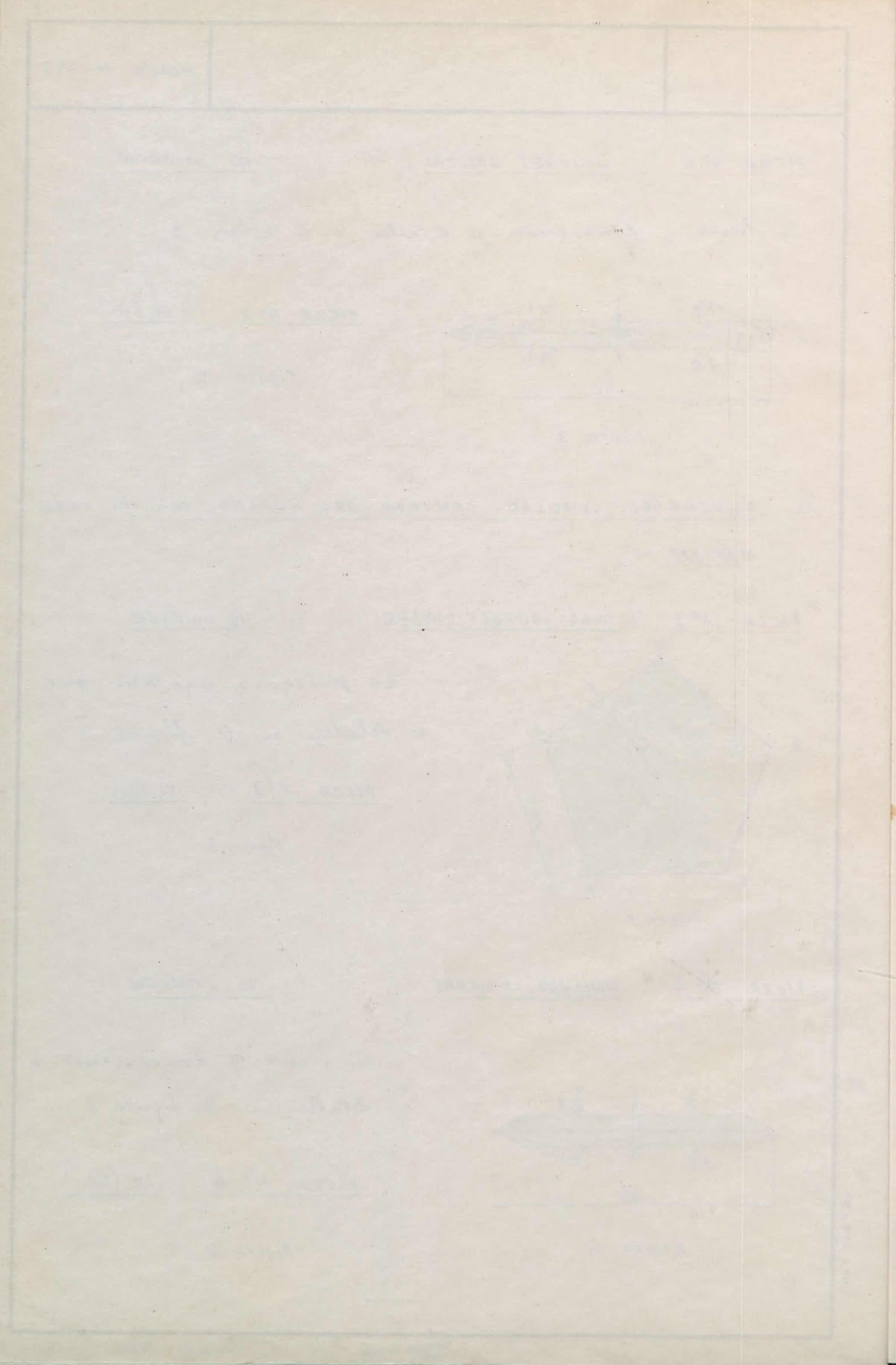
Figura 4

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 4

Alvarez Enero 1980



Modelo M-49.3

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS LATERALES 12 unidades

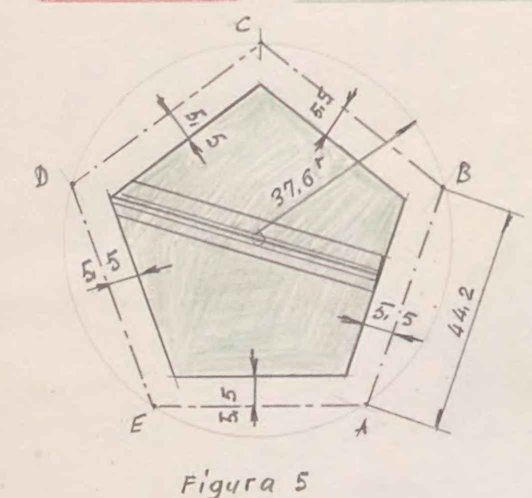


Figura 5

La forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del pentágono regular convexo ABCDE, de la figura 3

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS LATERALES 24 unidades (simétricas dos a dos)

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6, y su colocación en la figura 5

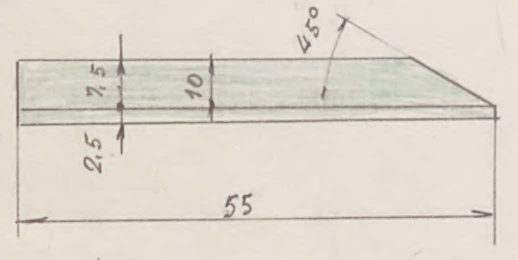


Figura 6

PIEZA Nº 6 24 (u) simétricas 2 a 2

Figura 6

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES 12 unidades

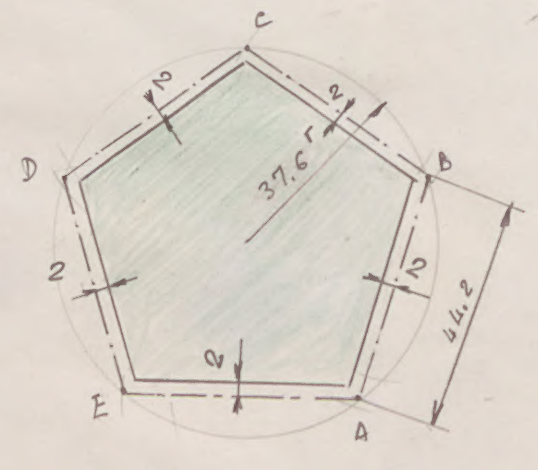


Figura 7

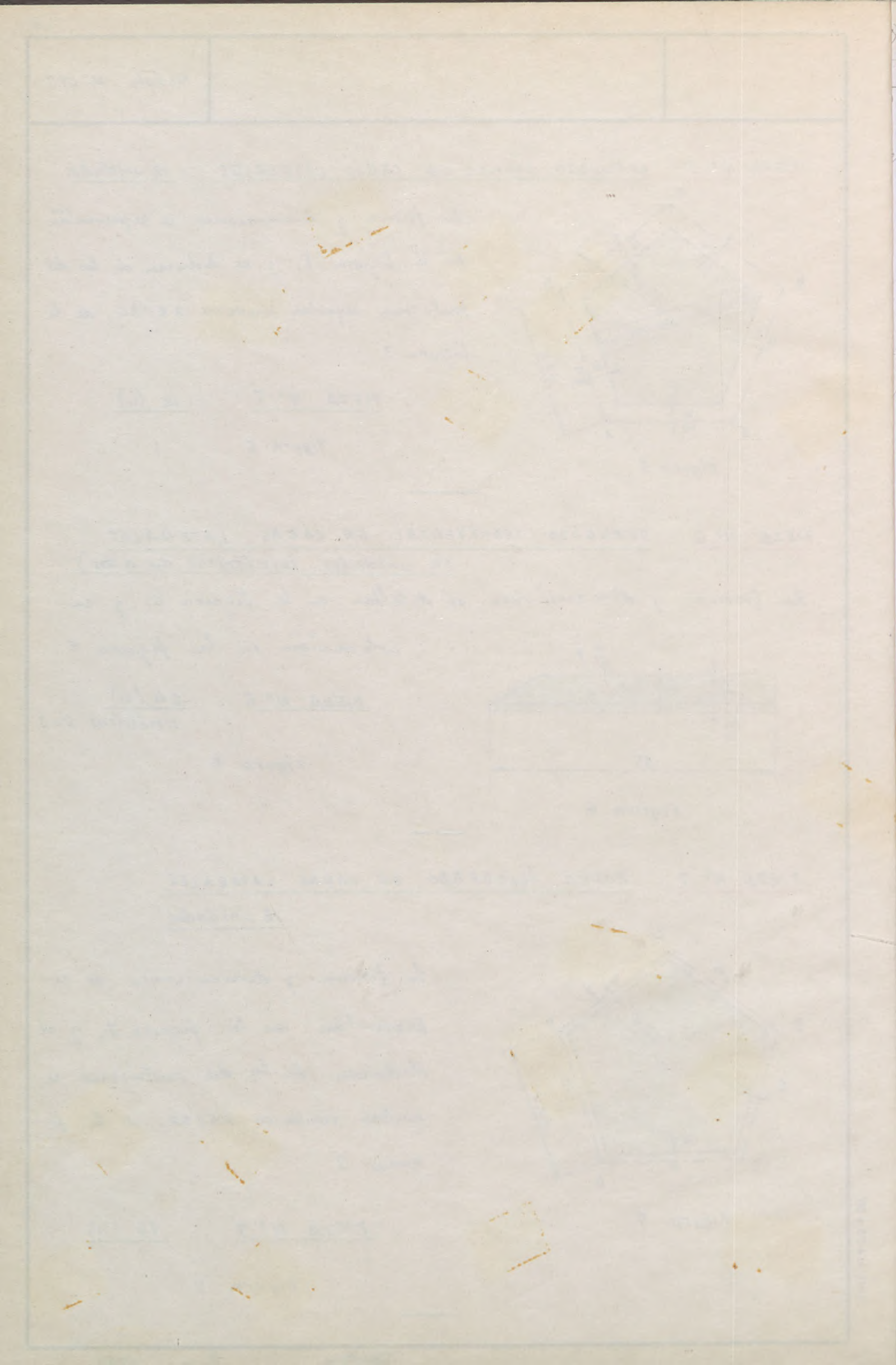
La forma y dimensiones se representan en la figura 7, y se deducen de las del pentágono regular convexo ABCDE, de la figura 3

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 7

UNE A 4-210 x 297

Álvarez Enero 1980



estrellado de caras pentagonales estrelladas
doce vértices de ángulos pentaédricos convexos.
Radio de la esfera circunscrita = $9_{12} < 110$ mm

FORRO COLOREA-
DO
12 (u)

12 (u)

REFUERZO NORMAL
12 (u)

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-49.4

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-49.3 DE IGUAL FORMA, PERO DE MENOR RADIO EL DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.-

Radio de la esfera que pasa por los vértices exteriores:

$$r' = 76,1 \text{ mm.}$$

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-49.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-49.3, de igual forma y menor tamaño, siendo el dodecaedro estrellado de caras vaciadas, y el dodecaedro regular convexo del núcleo, de caras macizas.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-49,3, ya que es de igual forma, pero es de menor longitud el radio "r_{ec}^{12E}" de su esfera circunscrita.

Para obtener el despiece del mismo, aplicaremos el estudio analítico hecho para el modelo M-49.1, determinando previamente el coeficiente de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL MODELO ESTUDIADO:

$$r_{ec}^{12E} = 76,1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}$$

A continuación exponemos en diversas tablas, las longitudes reseñadas en las figuras del modelo M-49.3, y de los valores corres-

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Enero 1980

pondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-49.4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES PENTAGONALES RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTRELLADO. 20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	71,5	49,5
	44,2	30,6
20 (u)	4	3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	70	70
60 (u)	3	2,5
	70°	70°
	16°	16°

B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚCLEO, CON SUS CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	44,2	30,6
12 (u)	37.6	26

—

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	43	29
30 (u)	4	3
	28°	28°

—

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL EN CARAS LATERALES 12 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	44.2	30.6
12 (u)	37.6	26
	5.5	4

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS LATERALES

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas 24 unidades (simétricas 2 a 2)

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	57	5.7
	2.5	2.5
24 (u)	7.5	7.5
	10	10
	45°	45°

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES 12 unidades

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 7	44.2	30.6
12 (u)	37.6	26
	2	2

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Enero 1980

MODELO CORPÓREO DEL DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO, CÓNCAVO, DE CARAS MACIZAS, DE TERCERA ESPECIE, FORMADO POR DOCE PENTÁGONOS REGULARES CONVEXOS, Y DOCE VÉRTICES DE ÁNGULOS PENTAÉDRICOS DE SEGUNDA ESPECIE, CONCURRIENDO EN CADA UNO DE DICHOS ÁNGULOS CINCO CARAS DEL MISMO.

Radio de la esfera que pasa por los vértices:

r' = 110 m m.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular estrellado, cóncavo, de caras macizas, de tercera especie, formado por doce pentágonos regulares convexos, y doce vértices de ángulos pentaédricos de segunda especie, concurriendo en cada cara de dichos ángulos, cinco caras del mismo.

Este dodecaedro regular estrellado, puede obtenerse de los poliedros regulares convexos, en las dos formas diferentes que a continuación enunciamos:

A) Del icosaedro regular convexo, uniendo sus vértices convenientemente.

B) Del dodecaedro regular convexo, prolongando sus aristas convenientemente.

Estudiaremos a continuación sucesivamente cada forma de generación:

A 1) Obtención del dodecaedro regular estrellado, por unión de los vértices de un icosaedro regular convexo.

Supongamos un icosaedro regular convexo, que llamaremos "generador", de arista "a_{20}", y unamos cada uno de sus vér-

UNE A 4-210 x 297

tices con los correspondientes a los cinco extremos de las aristas concurrentes en el vértice diametralmente opuesto. Estas rectas, limitadas por los vértices, serán pues "diagonales" del icosaedro generador. Por lo cual, por cada uno de los vértices de dicho icosaedro generador, pasarán cinco diagonales, formándose un total de $\frac{12 \times 5}{2} = 30$ diagonales distintas.

A su vez, estas diagonales, al cortarse mutuamente, formarán doce pentágonos regulares estrellados, planos, de segunda especie. Los pentágonos regulares convexos, generadores de los anteriores estrellados, e inscritos en una misma circunferencia, son las caras del poliedro estrellado estudiado.

ESTUDIO GEOMÉTRICO-ANALÍTICO DE UNA CARA DE DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO, ESTUDIADO EN ESTE EJERCICIO.

De lo expuesto anteriormente se deduce que dicha cara es un pentágono regular convexo ABCDE (fig. 1), cuyo lado "l_5" es igual a la arista a_{20} del icosaedro generador ($l_5 = a_{20}$)

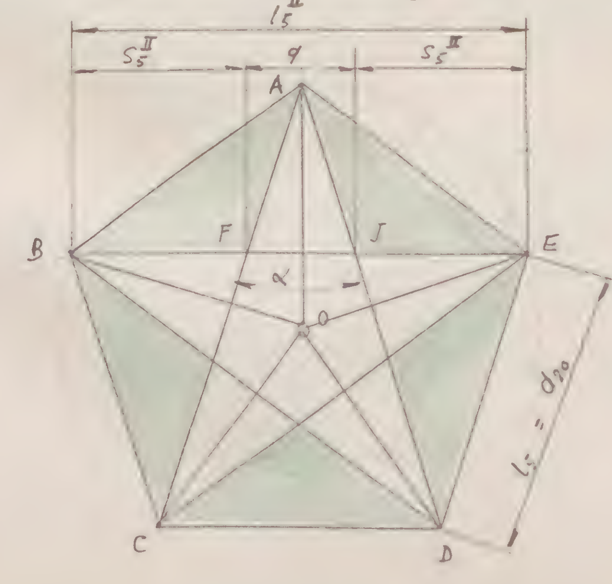


Figura 1

El pentágono regular estrellado de segunda especie inscrito en el anterior se obtiene como intersección de cada cara ABCDE con las cuatro restantes que concurren en el vértice "O" de la misma.

Este pentágono regular es-

UNE A 4-210 x 297

trellado de segunda especie, reduce la superficie del pentágono regular convexo ABCDE de cada cara, que queda limitada a los cinco triángulos isósceles sombreados en la figura, siendo estos cinco triángulos la zona aparente de cada cara.

En el estudio geométrico-analítico que hicimos en el modelo M-49.1, tomamos como base para su desarrollo, la figura 1 (h 3), que es de igual forma y dimensiones que las de la figura 1 de este ejercicio, por lo que podemos aplicar las mismas fórmulas deducidas en aquél, a las de éste.

Por consiguiente, tendremos

$$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \qquad (1)$$

fórmula igual a la (2) del ejercicio M-49.1, que nos permite calcular la arista a_{20} en función del radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al poliedro estudiado

---

También tendremos que la magnitud S_5^{II}, igual al lado igual del triángulo isósceles de la parte aparente de la cara ABCDE, es

$$S_5^{II} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} \qquad (2)$$

fórmula igual a la (3) del ejercicio M-49.1, que nos permite calcular la longitud del lado igual del triángulo isósceles AJE, que en número total de sesenta, forman la superficie exterior del poliedro estrellado estudiado.

A 2) Obtención del dodecaedro regular estrellado, por prolongación de las aristas de un dodecaedro regular convexo.

En efecto, los segmentos "q" (fig. 1) de las doce caras aparentes del poliedro estudiado, forman en cada una de ellas un pentágono regular convexo, y el conjunto de todas ellas, un dodecaedro regular convexo de arista $a_{12} = q$, que podemos denominar como "núcleo" del dodecaedro regular estrellado, estudiado en este ejercicio.

Así pues, prolongando las cinco aristas de cada cara de un dodecaedro regular convexo, se formarán doce pentágonos regulares estrellados de segunda especie, análogos a los de la figura 1, que permiten obtener los pentágonos irregulares convexos, caras del poliedro estudiado.

La longitud de la arista a_{12} del dodecaedro núcleo será

$$a_{12} = \sqrt{\frac{2 \times (25 - 11\sqrt{5})}{5}}\; r_{ec}^{20} \qquad (3)$$

fórmula igual a la (4) 45 del ejercicio M-49.1, que nos permite calcular a_{12} en función del radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al poliedro estudiado.

Terminado el estudio analítico de este poliedro estrellado, procedemos a su construcción, para lo cual son necesarias las siguientes piezas:

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Enero 1980

De lo expuesto anteriormente se deduce que la superficie aparente de las doce caras de los pentágonos regulares convexos de este poliedro estrellado, está formada en cada una de ellas por cinco triángulos isósceles AJE, etc. (fig. 1) en el que el lado de la base $\overline{AE}$, es igual a la arista a_{20} del icosaedro generador, y los lados iguales $\overline{AJ}$ y $\overline{JE}$ son iguales al segmento S_5^{II} del pentágono regular estrellado de vértices ABCDE. Las fórmulas de las longitudes de estos segmentos, (1) y (2) nos permiten obtener sus longitudes para $r = 110$, y son las siguientes:

$$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 \cong 1,05\,14\,62\,22\,4\ldots \times 110 \cong 115,7 \text{ mm}$$ y

$$S_5^{II} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \times 110 \cong 0,64\,98\,39\,39\,3\ldots \times 110 \cong 71,5 \text{ mm}$$

Con cuyos valores puede dibujarse dicha cara, representada en la figura. 2 por el triángulo ABC, debidamente acotado.

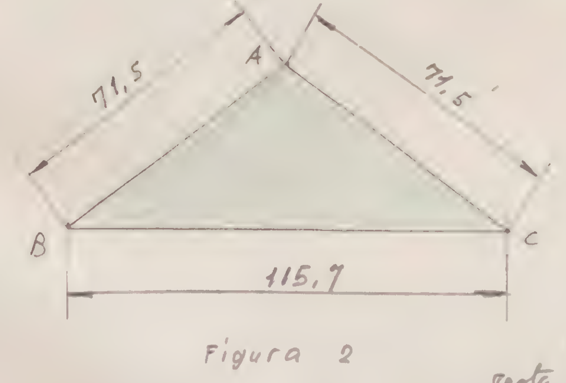


Figura 2

El poliedro estudiado, se compone pues de 5 x 12 = 60 caras iguales ABC, y cada tres de ellas forman una pirámide regular recta, cóncava, cuya base es una cara del icosaedro generador, estando su vértice en el interior del mencionado icosaedro.

Para simplificar la construcción, es conveniente construir previamente estas veinte pirámides, y acoplarlas posteriormente por

UNE A 4-210 x 297

Calvarre Enero 1980

Modelo M- 50.1

las aristas de sus bases de forma que sus vértices se dirijan hacia el centro del icosaedro generador.

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES REGULARES TRIANGULARES, CÓNCAVAS Y RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTRELLADO 20 unidades

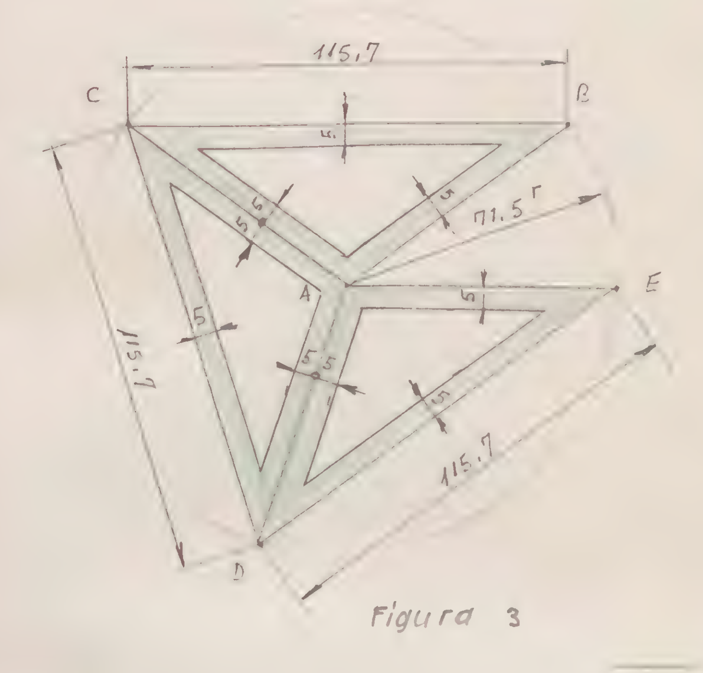


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3, y se obtiene por acoplamiento de tres caras iguales de la fig. 2

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 2 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES 60 unidades

Su forma y dimensiones son las del triángulo ABC de la figura 2 y se detallan en la figura 4

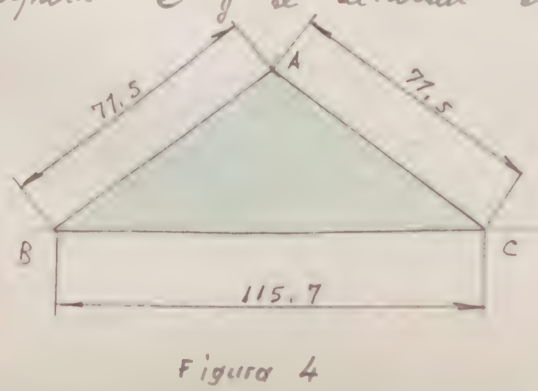


Figura 4

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 4

UNE A 4-210 x 297

Enero 1980



Modelo M- 50.1

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN BASES PIRÁMIDES TRIANGULARES

30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

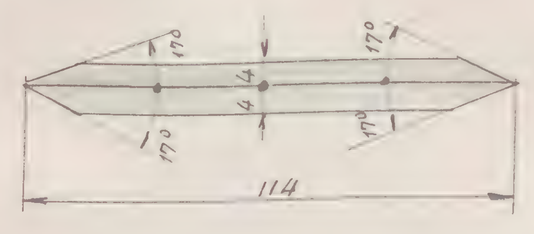


Figura 5

PIEZA Nº 3 30 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES TRIANGULARES

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

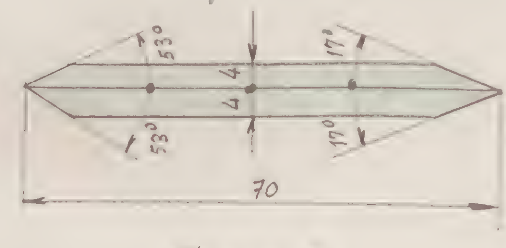


Figura 6

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 5 REFUERZO DE LAS CARAS LATERALES

60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del Triángulo ABC de la figura 4, y se detallan en la figura 7.

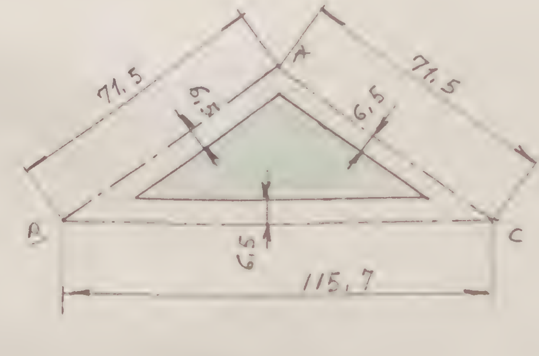


Figura 7

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 7

UNE A 4-210 x 297

Enero 1970

Modelo M- 50.1

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 4, y se detallan en la figura 8

A
71,5
71,5
2
2
2
B
C
115,7

Figura 8

PIEZA Nº 6 60 (u)

Figura 8

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Enero 1980

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-50.1, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, SIENDO MENOR EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-50.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular estrellado, cóncavo, de caras macizas, de tercera especie, formado por doce pentágonos regulares convexos, y doce vértices de ángulos pentaédricos de segunda especie, concurriendo en cada cara de dichos ángulos, cinco caras del mismo.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-50.1, de igual forma, siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}' = 76.1$ mm).

Para obtener el despiece de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico hecho para el modelo M-50.1, determinando el coeficiente "k" de reducción, k = 76.1 : 110, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec}^{12E} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}$$

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes

UNE A 4-210 x 297

Álvarez Enero 1980

		Modelo M-50.2

reseñadas en las figuras del modelo M-50.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-50.2, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES REGULARES TRIANGULARES, CÓNCAVAS, RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTRELLADO,- 20 (u)

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	115.7	80
	71.5	49.5
20 (u)	5	4

PIEZA Nº 2 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES 60 (u)

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	115.7	80
60 (u)	71.5	49.5

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1980

		Modelo M- 50.2

FIGURA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN BASES PIRÁMIDES TRIANGULARES 30 Unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	114	78.5
30 (u)	4	3
	17º	17º

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES TRIANGULARES 60 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	70	48
60 (u)	4	3
	53º	53º
	17º	17º

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1980

Modelo M- 50.2

PIEZA Nº 5 REFUERZO DE LAS CARAS LATERALES 60 unidades

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	115,7	80
60 (u)	71,5	49,5
	6,5	5,5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES 60 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	115,7	80
60 (u)	71,5	49,5
	2	2

UNE A 4-210 x 297

Talavera Enero 1980

VARIANTE DEL MODELO M-50.1, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, SIENDO EL DODECAEDRO ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS, Y EL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚCLEO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera que pasa por los vértices:

$r' = 110$ mm.

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-50.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-50.1, de igual forma y dimensiones, siendo el dodecaedro estrellado, de caras vaciadas, y el dodecaedro regular convexo del núcleo, de caras macizas.

Las dimensiones de los poliedros componentes de este modelo, son iguales a las del M-50.1, siendo necesarias para su construcción, las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES REGULARES TRIANGULARES, CÓNCAVAS Y RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTRELLADO 20 unidades

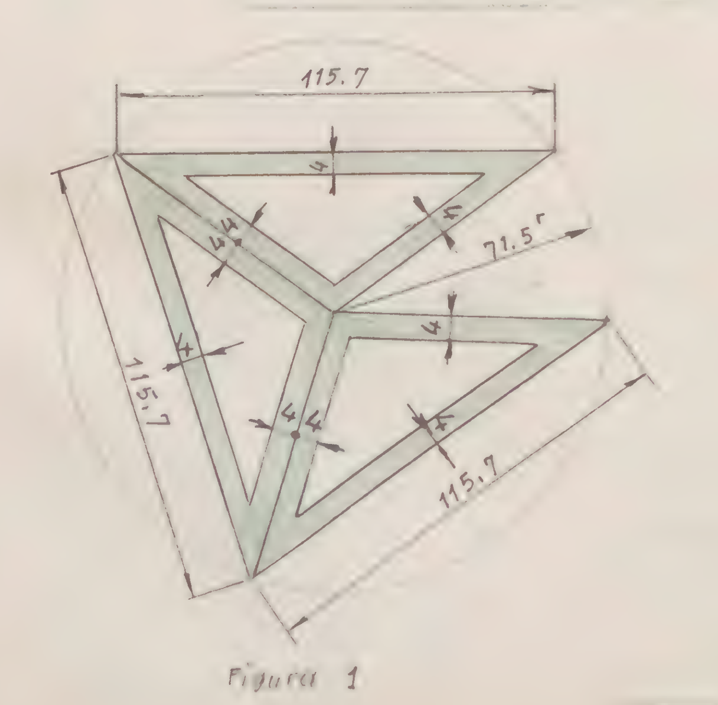


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

Modelo M- 50.3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN BASES PIRÁMIDES TRIANGULARES 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

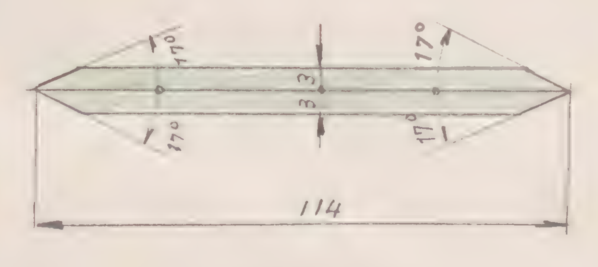


Figura 2

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES TRIANGULARES 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

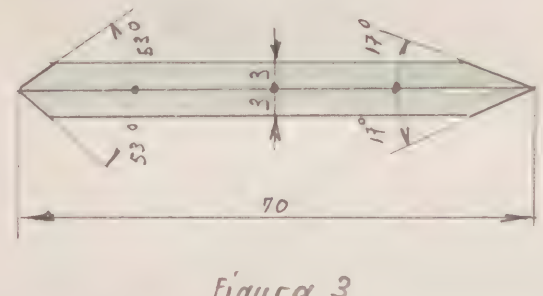


Figura 3

PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 3

B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚCLEO, CON SUS CARAS MACIZAS.- 12 unidades

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES

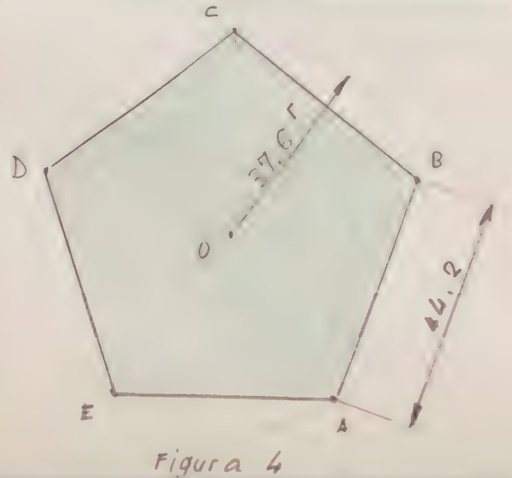


Figura 4

Son pentágonos regulares, cuya forma y dimensiones se detallan en la fig. 4

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Enero 1980

Modelo M-50.3

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 30 unidades

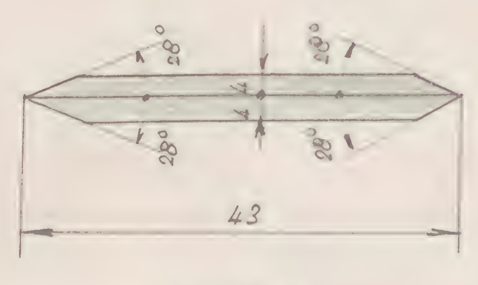


Figura 5

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 30 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS LATERALES

12 unidades

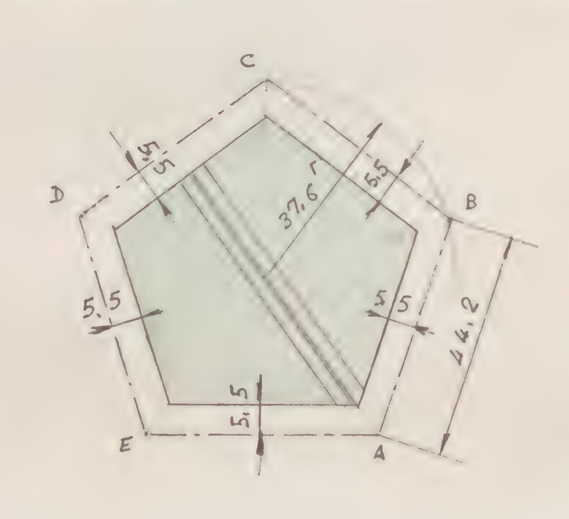


Figura 6

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS LATERALES

24 unidades (simétricas 2 a 2)

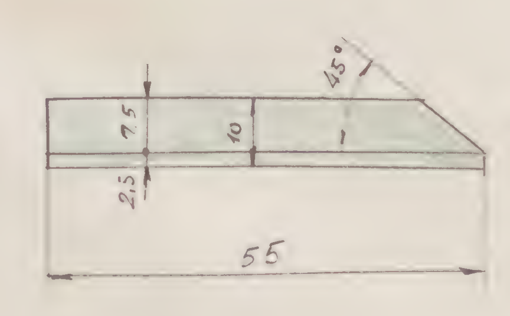


Figura 7

La forma y dimensiones se detallan en la figura 7 y su colocación en la figura 6

PIEZA Nº 7 24 (u) simétricas

Figura 7



PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

12 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 8, y se deducen de las del pentágono ABCDE, de la figura 3.

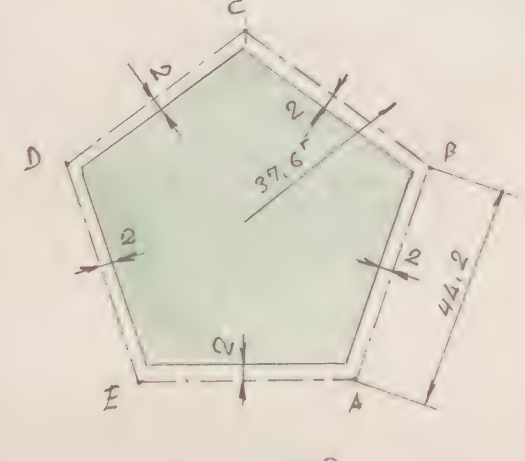
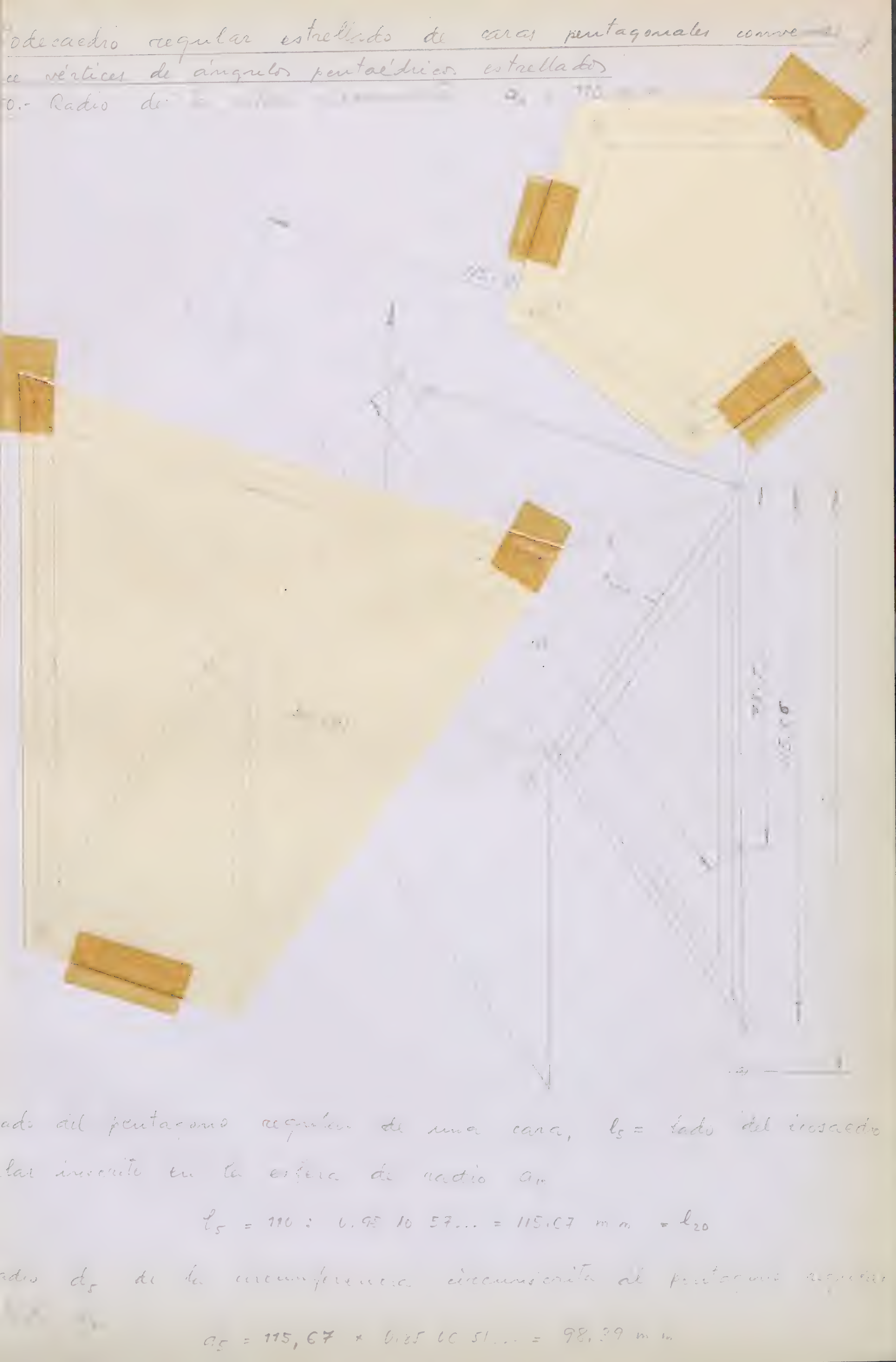


Figura 8

PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 8



odecaedro regular estrellado de caras pentagonales conve…
… vértices de ángulos pentaédricos estrellados

0.- Radio de … a_n = 110 mm

…ado del pentagono regular de una cara, l_5 = lado del icosaedro
…lar inscrito en la esfera de radio a_n

$$l_5 = 110 : 0.95\ 10\ 57\ldots = 115.67 \text{ mm} = l_{20}$$

…adio a_5 de la circunferencia circunscrita al pentagono regular

$$a_5 = 115,67 \times 0.85\ 06\ 51\ldots = 98,39 \text{ mm}$$

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-50.3

DE IGUAL FORMA, SIENDO MENOR EL RADIO

DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera que pasa por los vértices exteriores:

$r' = 76.1$ mm.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-50.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-50.3, de igual forma y menor tamaño siendo el dodecaedro estrellado de caras vaciadas, y el dodecaedro convexo del núcleo, de caras macizas.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-50.3, ya que es de igual forma, pero de menor longitud el radio "r_{ec}^{12E}" de su esfera circunscrita.

Para obtener el despiezo del mismo, aplicaremos el estudio analítico hecho para el modelo M-50.1, determinando previamente el coeficiente de reducción $k = 76,1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL MODELO ESTUDIADO:

$$r_{ec}^{12E} = 76,1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN:

$$k = \frac{76.1}{110} = 0,69\widehat{18}$$

A continuación expondremos en diversas tablas, las longitudes reseñadas en las figuras del modelo M-50.3, y de los

valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-50,4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES TRIANGULARES, CÓNCAVAS Y RECTAS, CUYAS CARAS LATERALES LIMITAN EL DODECAEDRO ESTRELLADO 20 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 1	115,7	80
	71,5	49,5
20 (u)	4	3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN BASES PIRÁMIDES TRIANGULARES 30 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 2	114	78
30 (u)	3	2,5
	17º	17º

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1980

Modelo M-50.4

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES TRIANGULARES 60 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 3	70	48
	3	2.5
60 (u)	53°	53°
	17°	17°

B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DEL NÚCLEO, CON SUS CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	44.2	30.6
12 (u)	37.6	26

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

UNE A 4-210 x 297

Calvache Enero 1980



Modelo M-50.4

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	43	29
	4	3
30 (u)	28°	28°

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL EN CARAS LATERALES

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas: 12 unidades

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	44.2	30,6
12 (u)	37.6	26
	5.5	4

PIEZA Nº 7 (No se necesita)

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

12 unidades

La figura 8, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 8	44.2	30.6
12 (u)	37.6	26
	2	2

UNE A 4-210 x 297

[signature] Enero 1980

MODELO CORPÓREO DEL ICOSAEDRO REGULAR ESTRELLADO, CÓNCAVO, DE CARAS MACIZAS, DE SÉPTIMA ESPECIE, FORMADO POR VEINTE TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS, Y DOCE VÉRTICES DE ÁNGULOS PENTAÉDRICOS DE SEGUNDA ESPECIE, CONCURRIENDO EN CADA UNO DE DICHOS ÁNGULOS, CINCO CARAS DEL MISMO.

Radio de la esfera que pasa por los vértices:

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

[illegible] de [illegible] de [illegible] MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-51.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular estrellado, cóncavo, de caras macizas, de séptima especie, formado por veinte triángulos equiláteros, y doce vértices de ángulos pentaédricos de segunda especie, concurriendo en cada uno de dichos ángulos, cinco caras del mismo.

Este icosaedro regular estrellado, puede obtenerse del icosaedro regular convexo, de las tres formas diferentes que enunciamos a continuación:

A) Uniendo convenientemente los vértices del icosaedro regular convexo.

B) Hallando las intersecciones de los planos de cada cara del mencionado icosaedro regular convexo, con los planos de las caras contiguas a la opuesta, y tomando como nueva cara el triángulo formado por las tres rectas así determinadas.

C) Formando ángulos sólidos pentaédricos de segunda especie, alrededor de cada vértice del icosaedro regular convexo, dentro del cual queda inscrito el estrellado.

Estudiaremos sucesivamente, a continuación cada forma de generación.

UNE A4 210 x 297

[illegible] Febrero 1980



		Modelo M-51.1

A1) Obtención del icosaedro regular estrellado, por unión de los vértices de un icosaedro regular convexo.

Supongamos un icosaedro regular convexo, que llamaremos "generador", de arista "a_{20}", y unamos cada uno de sus vértices con los correspondientes a los cinco extremos de las aristas concurrentes en el vértice diametralmente opuesto. Estas rectas, limitadas por los vértices, serán pues "diagonales" del icosaedro generador (ninguna de ellas son aristas del icosaedro). Por consiguiente, por cada uno de los vértices de dicho icosaedro generador, pasarán cinco diagonales, formándose un total de $\frac{12 \times 5}{2} = 30$ diagonales distintas.

Estas rectas al cortarse mutuamente, forman veinte triángulos equiláteros y a su vez doce pentágonos regulares estrellados de segunda especie. Los triángulos equiláteros son las caras del poliedro estudiado y los lados de dichos triángulos, así como los lados de los pentágonos estrellados, son aristas de dicho poliedro estrellado

Las mutuas intersecciones de las veinte caras triangulares, forman en cada cara nueve zonas triangulares que son las partes vistas del poliedro estrellado, según puede apreciarse en la figura 1, cuyas zonas vistas se han destacado en color, pudiendo observarse seis zonas triangulares (A) en forma de triángulos escalenos iguales, y tres zonas (B) en forma de triángulos isósceles también iguales.

[firma] Febrero 1980



Figura 1

La construcción gráfica y analítica de estos nueve triángulos, así como las del equilátero BEF de la cara de este poliedro estrellado, la estudiaremos seguidamente.

a) ESTUDIO GEOMÉTRICO-ANALÍTICO DE UNA CARA DEL ICOSAEDRO REGULAR ESTRELLADO Y DE LAS MUTUAS INTERSECCIONES DE ÉSTA CON SEIS DE LAS RESTANTES CONCURRENTES EN CADA VÉRTICE, Y CUATRO NO CONCURRENTES EN ELLOS.

De lo expuesto anteriormente se deduce que la arista "a_{20}^{E}" de este icosaedro estrellado, es el lado "l_5^{II}" de un pentágono regular estrellado de segunda especie, a su vez inscrito en un pentágono regular convexo de lado "l_5", igual a la arista "a_{20}" del icosaedro regular convexo, generador de



este poliedro estrellado. Esto se deduce de la generación del mismo por unión de los vértices de un icosaedro regular convexo, detallada al principio. (Ver párrafo A1)

b). SOLUCIÓN GRÁFICA- ANALÍTICA

Las consideraciones anteriores justifican las construcciones gráficas siguientes, que comienzan por la obtención del lado l_3 de una cara triangular del poliedro estrellado, que es a su vez la arista "a_{20}^{E}" de éste. Las construcciones se detallan en la figura 2.

DATO ÚNICO: Radio "r_{ec}^{20E}" de la esfera circunscrita al poliedro estudiado:

$$r_{ec}^{20E} = 110 \text{ mm}$$

1° Construir un pentágono regular convexo ABCDE, de lado igual a $l_5 = a_{20}$ = arista del icosaedro regular convexo generador. (ver ejercicio G.P. 1400-44).

Para ello es preciso conocer previamente el valor de l_5 en función de r_{ec}^{20}; se deduce de la fórmula

$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$, obtenida en el ejercicio G.E. ,- lám. 5), despejando en ella a_{20}, tendremos:

$$a_{20} = 1 : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} r_{ec}^{20} = 1 : \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} r_{ec}^{20} = 1 : \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{8(5-\sqrt{5})}{20}} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})}{10}} r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}$$

de donde se obtiene finalmente:

UNE A4 210 x 297



Modelo N-51.1

(1) $\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \simeq 1.0514622\,4\ldots \times 110 \simeq \boxed{115{,}7 \text{ mm}}$

La construcción del pentágono regular de lado $l_5 = 115.7$ mm es más exacta, calculando previamente el radio r_{c-5} de su circunferencia circunscrita. Su valor es (ver G.P 1.400-44 (3))

(2) $\boxed{r_{c-5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5 \simeq 0{,}85065 \times 115.7 = \boxed{98.4 \text{ mm}}$

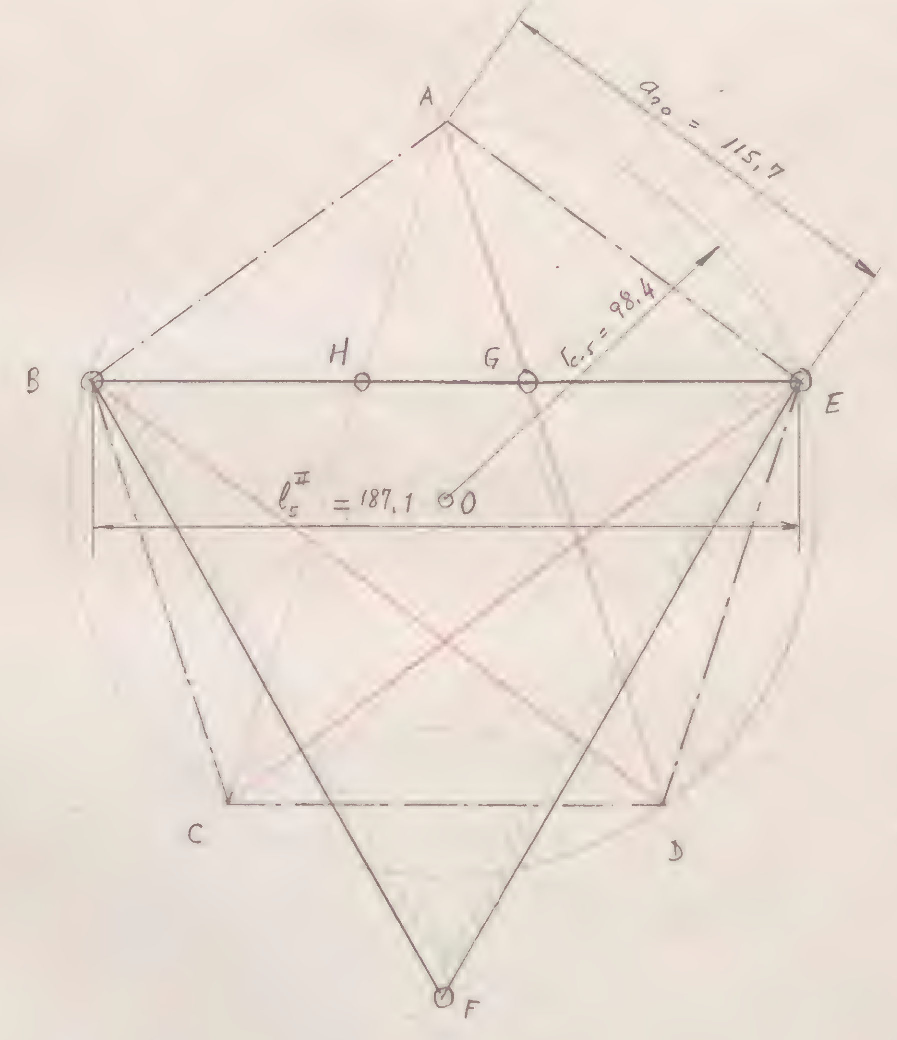


Figura 2

$\boxed{2^{\circ}}$ Construir el pentágono regular estrellado ACEBDA de segunda especie, uniendo los vértices del pentágono regular convexo ABCDE de dos en dos.

El lado $\overline{BE}$ de dicho pentágono estrellado, es el lado l_5^{II}

Alvarez Febrero 1980



de una cara triangular del poliedro estudiado, y a su vez la arista " a_{20}^{E} " del mismo.

3º Con lado BE, construir el triángulo equilátero BEF, cara del poliedro estudiado (ver ejercicio G.E. 1400-42).

El lado " l_5^{II} " = a_{20}^{E} se obtiene de la fórmula

(3) $$l_5^{II} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \, l_5$$

deducida en el ejercicio G.P. 1:400-62 (1) en la que $\boxed{l_5} = a_{20} = \boxed{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} \, r_{ec}^{20} = 1.05\ 14\ 62\ 22\ 4 \ldots \, r_{ec}^{20}$, por lo que será:

(4) $$\boxed{\overline{BE}} = \boxed{l_5^{II}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times l_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} = \boxed{(\sqrt{5}+1) \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20}} =$$

$$= 1.70\ 13\ 01\ 61\ 7 \ldots \times 110 = \boxed{187,2 \ \text{mm}}$$

A continuación vamos a indicar el proceso a seguir para conseguir el trazado de las zonas (A) y (B) de la figura 1, que nos han de servir para la construcción del poliedro estrellado.

Para ello, destaquemos que la situación de los puntos H y G en el lado $\overline{BE}$ de la cara triangular, se obtiene por la intersección de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ (figura 2) del pentágono regular estrellado de segunda especie ACEBDA con el lado $\overline{BE}$ del triángulo equilátero BEF de la cara del poliedro estrellado.

Así pues, podemos construir el triángulo equilátero BEF (fig. 3) y situar en sus tres lados los puntos H y G.



Modelo M-51.1

por medio de la construcción realizada en la figura 2. (puntos H_1, H_2, G_1, G_2). Con ellos obtendremos en la figura 3, los segmentos

$\overline{BH} = \overline{GE} = \overline{EH_1} = \overline{G_1F} = \overline{FG_2} = \overline{H_2B}$ y también:

$\overline{HG} = \overline{H_1G_1} = \overline{H_2G_2}$

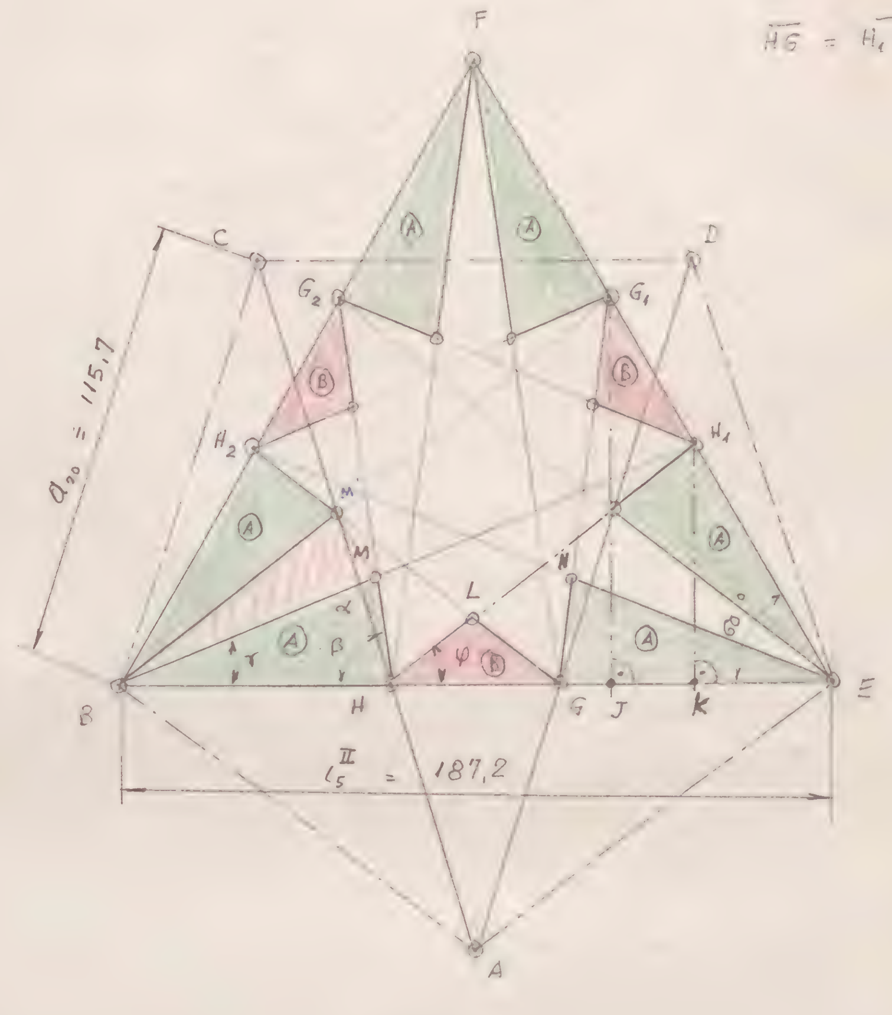


Figura 3

Uniendo los puntos intermedios de los lados del triángulo, BEF, con los vértices B, E y F del mismo, y los intermedios entre sí, en la forma que se indica en la figura 3, obtendremos las distintas zonas coloreadas (A) y (B) que son las partes vistas de cada una de las veinte caras triangulares del poliedro estrellado.

Las seis zonas (A) tienen la forma de triángulos escalenos iguales, y las tres zonas (B), la de triángulo isósceles tam-

UNE A4 210 x 297

bien iguales entre sí.

Vamos a resolver trigonométricamente ambos triángulos.

a) Triángulo escaleno BHM (fig. 3)

Tracemos previamente por los puntos H_1 y G_1 rectas perpendiculares al lado $\overline{BE}$, siendo K y J los pies de dichas perpendiculares respectivamente.

De la figura se deducen las siguientes relaciones métricas:

(5) $\boxed{\overline{BH}} = a = S_5^{II} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20}}$ (ver G.P. 1.400-62 (4))

(6) $\boxed{\overline{EH_1}} = \overline{BH} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20}}$

(7) $\boxed{\overline{BE}} = \ell_5^{II} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} a_{20}}$ (ver G.P. 1400-62 (1))

(8) $\boxed{\overline{KE}} = \overline{EH_1} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4} a_{20}}$

(9) $\boxed{\overline{HG}} = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2} a_{20}}$ (ver G.P. 1400-62 (5))

(10) $\boxed{\overline{BK}} = \overline{BE} - \overline{KE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a_{20} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} a_{20} = \left[\frac{2\sqrt{5}+2}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right] a_{20} =$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+1}{4} a_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+3}{4} a_{20}}$$

(11) $\boxed{\overline{H_1 K}} = EH_1 \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{5}-1)}{4} a_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4} a_{20}}$

(12) $\boxed{\overline{G_1 H_1}} = HG = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2} a_{20}}$

(13) $\boxed{\overline{G_1 E}} = \overline{G_1 H_1} + \overline{EH_1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a_{20} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} = \frac{3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}{2} a_{20} = \boxed{a_{20}}$

UNE A4 210 x 297



(14). $\boxed{\overline{G_1 J}} = \overline{G_1 E} \times \cos 30^\circ = a_{20} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} a_{20}}$

(15). $\boxed{\overline{JE}} = \overline{G_1 E} \times \cos 60^\circ = a_{20} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} a_{20}}$

(16) $\boxed{\overline{GE}} = \overline{BH} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20}}$

(17) $\boxed{\overline{GJ}} = \overline{GE} - \overline{JE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} - \frac{a_{20}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1-1}{2} a_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-2}{2} a_{20}}$

(18) $\boxed{tg\ \gamma} = \frac{H_1 K}{B K} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4} a_{20} : \frac{\sqrt{5}+3}{4} a_{20} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})}{4} =$

$= \frac{3\sqrt{15} - 3\sqrt{3} - \sqrt{75} + \sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15} - 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4} = \frac{4\sqrt{15} - 8\sqrt{3}}{4} =$

$= \boxed{\sqrt{15} - 2\sqrt{3}}$

(19) $\boxed{\gamma} = \text{arc. } tg\ (\sqrt{15} - 2\sqrt{3}) = \text{arc } tg\ (0{,}40\ 88\ 81\ 73 \ldots) = \boxed{22^\circ,\ 23\ 87\ 56\ 04}$

(20) $\boxed{\measuredangle\ NGE} = \measuredangle\ MHB = \boxed{\beta}$

(21) $\boxed{tg\ \beta} = \frac{G_1 J}{G J} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{20} : \frac{\sqrt{5}-2}{2} a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} =$

$= \frac{\sqrt{3}\ (\sqrt{5}+2)}{1} = \boxed{\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}$

(22) $\boxed{\beta} = \text{arc } tg\ (\sqrt{15} + 2\sqrt{3}) = \text{arc. } tg.\ (7{,}33\ 70\ 84\ 96\ 2 \ldots) = \boxed{82^\circ,\ 23\ 87\ 56\ 04 \ldots}$

(23) $\boxed{\overline{HK}} = \overline{BE} - (\overline{BH} + \overline{KE}) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} a_{20} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} a_{20} \right) =$

$= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) a_{20} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) a_{20} = \frac{4-\sqrt{5}+1}{4} a_{20} = \boxed{\frac{5-\sqrt{5}}{4} a_{20}}$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1980



Modelo M- 51.1

(24) $\boxed{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{H_1 K}{H K} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4} a_{20} : \frac{5 - \sqrt{5}}{4} a_{20} = \left[\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4} : \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \right] a_{20} =$

$$= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \times (5 + \sqrt{5})}{20} = \frac{5\sqrt{15} - 5\sqrt{3} + \sqrt{75} - \sqrt{15}}{20} =$$

$$= \frac{4\sqrt{15} - 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{20} = \frac{4\sqrt{15}}{20} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

(25) $\boxed{\varphi} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{3}{5}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0{,}77\,45\,96\,66\,9\ldots = \boxed{37^\circ{,}76\,12\,43\,9\ldots}$

Los cálculos previos anteriores (fórmulas (5) a (25)) nos permiten resolver los triángulos de las caras aparentes (A) y (B) detalladas en la figura 3, y poder construir este modelo. Los resultados finales los determinaremos en función del radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita, dato único del ejercicio; sustituyendo a_{20} por el valor deducido en la fórmula (1), hoja 5

$$\boxed{a_{20} = 2 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20}} \qquad (1)$$

RESOLUCIÓN DEL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO BHM DE LA FIGURA 3

DATOS: El lado BH y los dos ángulos γ y β, adyacentes a dicho lado.

INCÓGNITAS Los lado $\overline{BM}$, $\overline{MH}$ y el ángulo α

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1980



Modelo M-51.1

RESULTADOS

(26) $\boxed{\alpha} = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (82{,}°23\,87\,56\,04 + 22°, 23\,87\,56\,04) =$

$= \boxed{75°, 52\,24\,87\,92\ldots}$

(27) $\boxed{\overline{BM}} = \overline{BH} \times \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} \times \dfrac{\operatorname{sen} 82°, 23\,87\,56\,04}{\operatorname{sen} 75°, 52\,24\,87\,92} =$

$= \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \dfrac{0{,}99\,08\,39\,41\,5}{0{,}96\,82\,43\,83\,7} r_{ec}^{20} = \boxed{0{,}66\,50\,03\,10\,0 \ldots r_{ec}^{20}}$

(28) $\boxed{\overline{MH}} = \overline{BH} \times \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} \times \dfrac{\operatorname{sen} 22°, 23\,87\,56\,04}{\operatorname{sen} 75°, 52\,24\,87\,92} =$

$= \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \dfrac{0{,}37\,84\,66\,97\,8}{0.96\,82\,45\,83\,7} r_{ec}^{20} = \boxed{0{,}25\,40\,08\,581 \cdot r_{ec}^{20}}$

(29) $\boxed{\overline{BH}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} a_{20} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} = \boxed{0{,}64\,98\,39\,39\,2\ldots r_{ec}^{20}}$

Las fórmulas (27), (28) y (29) nos permiten calcular los tres lados de los triángulos de las zonas Ⓐ de la figura 3. en función del radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al poliedro estrellado estudiado

Los valores de ellos, para $r_{ec}^{20} = 110$ m m, serán pues

$\boxed{\overline{BH}} \cong 0{,}64\,98\,39\,39\,2 \ldots \times 110 \cong \boxed{71.5 \text{ m m}}$

$\boxed{\overline{BM}} \cong 0.66\,50\,03\,10\,0 \ldots \times 110 \cong \boxed{73.1 \text{ m m}}$

$\boxed{\overline{MH}} \cong 0{,}25\,40\,08\,581 \ldots \times 110 \cong \boxed{27.9 \text{ m m}}$

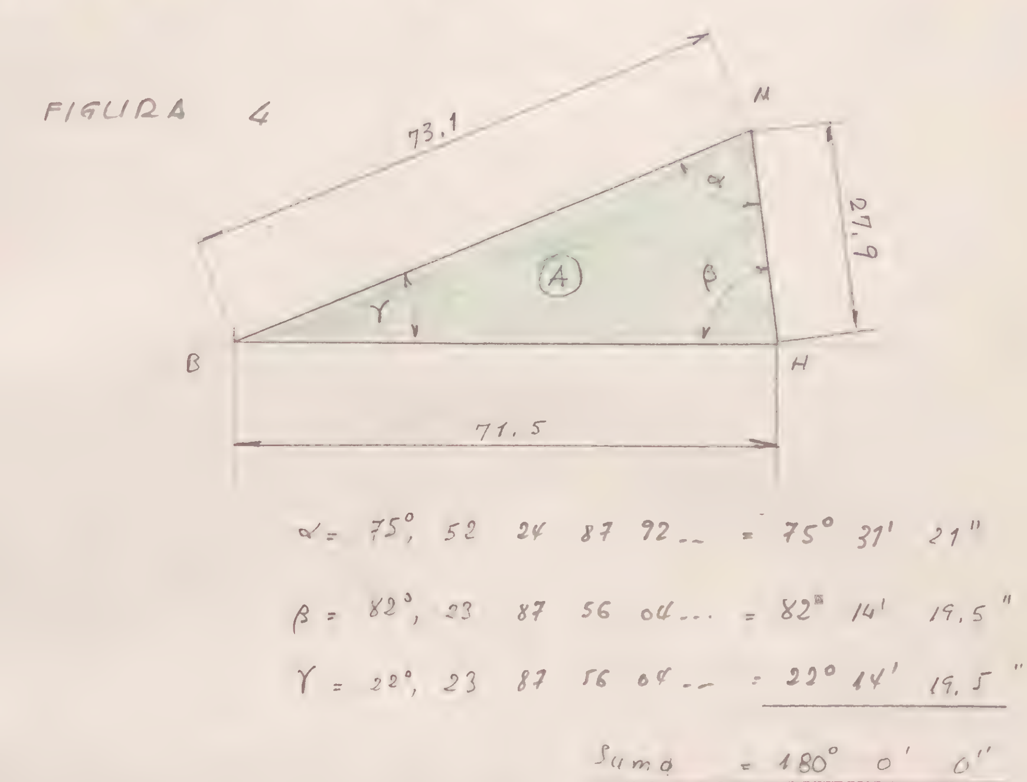
UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1970



En la figura 4 representamos debidamente acotada la mencionada cara zona Ⓐ.

FIGURA 4



$\alpha = 75°,\ 52\ 24\ 87\ 92... = 75°\ 31'\ 21''$

$\beta = 82°,\ 23\ 87\ 56\ 04... = 82°\ 14'\ 19.5''$

$\gamma = 22°,\ 23\ 87\ 56\ 04... = 22°\ 14'\ 19.5''$

Suma $= 180°\ 0'\ 0''$

RESOLUCIÓN DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES HLG DE LA FIGURA 3

DATOS: La base $\overline{HG}$ y uno de los ángulos φ, adyacentes a la base $\overline{HG}$.

INCÓGNITAS: El ángulo $\widehat{HLG}$ opuesto a la base

Los lados $\overline{HL} = \overline{LG}$ iguales

RESULTADOS

(30) $\left|\text{Ángulo } \widehat{HLG}\right| = 180° - 2\varphi = 180° - 2 \times 37°,\ 76\ 12\ 43\ 9... =$

$= \boxed{104°,\ 47\ 75\ 12\ 2}$

UNE A4 210 x 297

Calvares Febrero 1980



(31) $\overline{HL} = \overline{LG} = \frac{\overline{HG}}{2} : \cos\varphi = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \times a_{20} : \cos\varphi =$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{4\cos\varphi} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} = \frac{3-\sqrt{5}}{2\cos\varphi} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2\cos 37°,76\,12\,43\,9\ldots} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} = \boxed{0,25\,40\,08\,58\,1\ldots \times r_{ec}^{20}}$$

(32) $\overline{HG} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a_{20} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} =$

$$= \boxed{0,40\,16\,22\,83\,2\ldots\ r_{ec}^{20}}$$

Las fórmulas (31) y (32) nos permiten calcular los lados de los triángulos de las zonas Ⓑ de la figura 3, en función del radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al poliedro estrellado estudiado.

Los valores de ellos, para $r_{ec}^{20} = 110$ mm, serán pues:

$\overline{HL} = \overline{LG} \simeq 0,25\,40\,08\,58\,1\ldots \times 110 = \boxed{27,9 \text{ mm}}$

$\overline{HG} = 0,40\,16\,22\,83\,2\ldots \times 110 = \boxed{44,2 \text{ mm}}$

En la figura 5, representamos, debidamente acotada la mencionada cara Ⓑ.

UNE A4 210 x 297

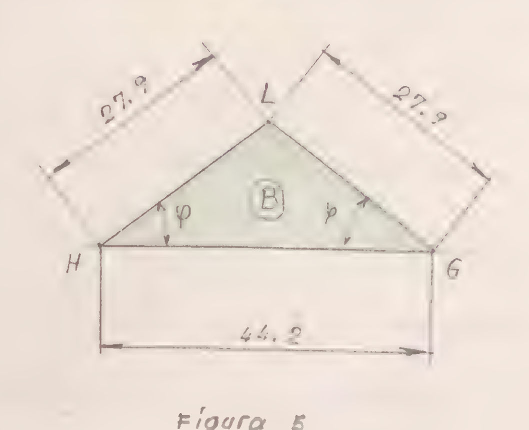


Figura 5

$\varphi = 37^\circ, 76\ 12\ 43\ 9\ldots = 37^\circ\ 45'\ 40.5''$

$\sphericalangle\ \widehat{HLG} = 104^\circ, 47\ 75\ 12\ 2\ldots =$

$= 104^\circ\ 28'\ 39''$

$$2\varphi + \sphericalangle\ \widehat{HGL} = 180^\circ$$

Terminado el estudio geométrico-analítico de este poliedro estrellado, procederemos a su construcción, para lo cual son necesarias las piezas que reseñamos a continuación.

Observemos previamente, que después de construido el poliedro estudiado, las caras vistas Ⓐ y Ⓑ de la figura 3, quedarán acopladas de tal manera que formen doce conjuntos parciales, en forma de pirámides pentaédricas de segunda especie, compuesta cada una de ellas de 10 caras Ⓐ y 5 caras Ⓑ. Las caras Ⓐ, pueden considerarse como caras laterales de dichas pirámides, y las caras Ⓑ como sus bases, aun cuando estas cinco están en distintos planos. Construidas las doce pirámides, se acoplarán por las aristas de sus bases, como si construyéramos un dodecaedro regular convexo.

Para la construcción de estas pirámides, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1. DESARROLLO TOTAL DE UNA PIRÁMIDE PENTAÉDRICA QUE FORMAN EL CONTORNO DEL POLIEDRO ESTRELLADO. 12 unidades



Modelo M- 51.1

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6, compuesta por 10 caras iguales a las de la figura 4, y de cinco caras iguales a las de la figura 5, acopladas entre sí de la forma representada en su desarrollo total. En dicha lámina se detallan además sus dobleces y cortes. Obsérvese que al acoplar a una cara (A) otra (B), los lados 0-7 y 7-C quedan alineados, por ser $\measuredangle\ \widehat{076} + \widehat{67C} = 180^\circ$ como puede comprobarse con sus datos numéricos dados en fig. 4 y fig 5

Véase comprobación

Doblez hacia abajo

Doblez hacia arriba

Figura 4	∡ 076 = α =	75°, 52 24 88
Figura 5	∡ HGL =	106°, 47 75 12
	suma =	180°

Figura 6

Febrero 1980

Modelo M- 51.1

Para el trazado gráfico de la figura 6, debe seguirse el siguiente orden:

1° Sobre una recta indefinida XX, y centro en O, trácese una circunferencia de radio igual a 73.1 mm, otra concéntrica con radio 71.5 mm y otra concéntrica con radio 101,0 mm.

2° Con radio igual a 27.9 mm, y centro en 1 (punto de intersección de la circunferencia de radio 73.1 mm. con el eje XX, trácese un arco que corte a la menor en el punto 2.

3° Con centro en 2, y con el mismo radio anterior, trácese otro arco que corte a la circunferencia mayor en el punto 3.

4° Repítanse sucesivamente las operaciones 2° y 3°, para determinar los puntos (4, 5); (6, 7); (8, 9); (10 - 1').

5° Únanse los puntos 1, 2, ---- 9, 10, 1' sucesivamente entre sí, y con el centro O, con lo que obtendremos diez triángulos escalenos iguales entre sí e iguales a los de la figura 4, que formarán el desarrollo lateral de las pirámides pentaédricas.

6° Tomando como base los lados (2-3); (4-5); (6-7); (8-9); y (10 - 1'), constrúyanse los triángulos tipo B, iguales a los de la figura 5, prolongando los radios 0-3, 0-5, ---- 0-1', hasta cortar a la circunferencia mayor en los puntos A, B --- D, E, vértices terceros de dichos triángulos.

NOTA IMPORTANTE Compruébese que el punto 9, no debe quedar sobre la recta inicial XX, tomada como



Modelo M- 51.1

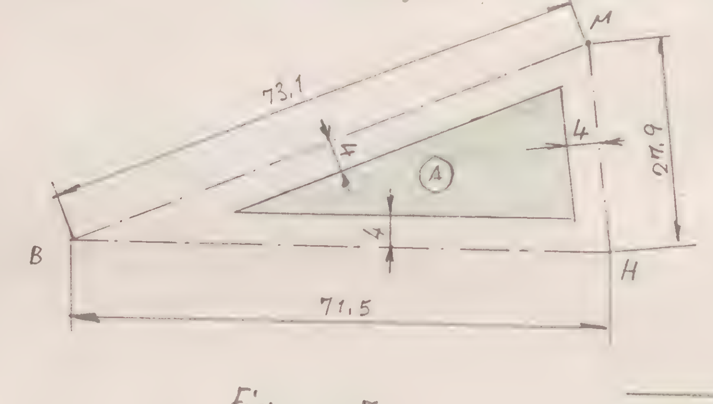
base del trazado, puesto que el radio 0-9, deberá estar desviado de dicho eje unos dos grados aproximadamente.

Véase que el ángulo γ (fig. 4) es de 22°,239, que repetido ocho veces nos dará: 8 × 22°,239 = 177°,9 < 180°

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL EN CARAS TIPO "A"

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7, y se deducen de las del triángulo escaleno BMH de la figura 4.



PIEZA Nº 2 60 (u)

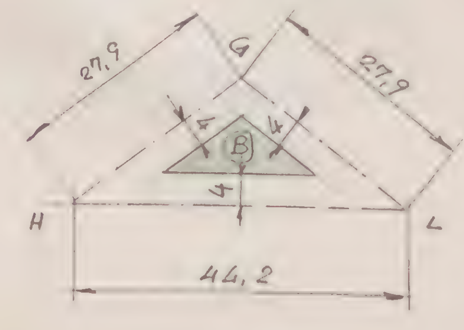
Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL EN CARAS TIPO "B"

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8, y se deducen de las del triángulo isósceles HGL de la figura 5.



PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 8

Figura 8

Febrero 1988


UNE A4 210 x 297

Modelo M - 51.1

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 73.1 mm

60 unidades

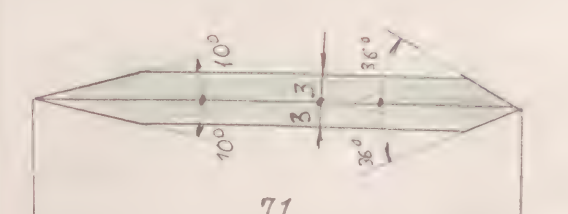


Figura 9

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 71,5 mm

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10

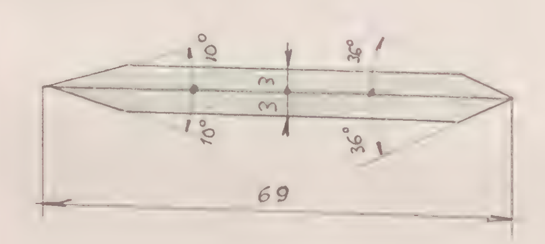


Figura 10

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 27.9 mm

30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

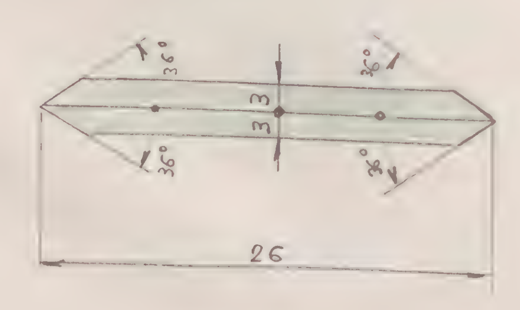


Figura 11

PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 11

Febrero 1980

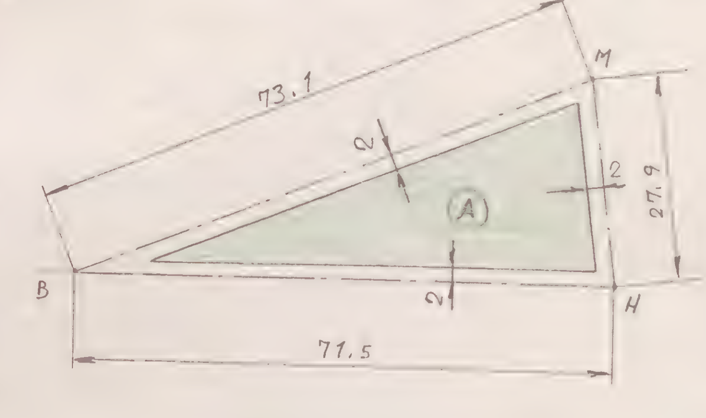


Modelo M- 51.1

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN CARAS TIPO (A)

120 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12, y se deducen de las del triángulo escaleno BMH de la figura 4.



PIEZA Nº 7 120 (u)

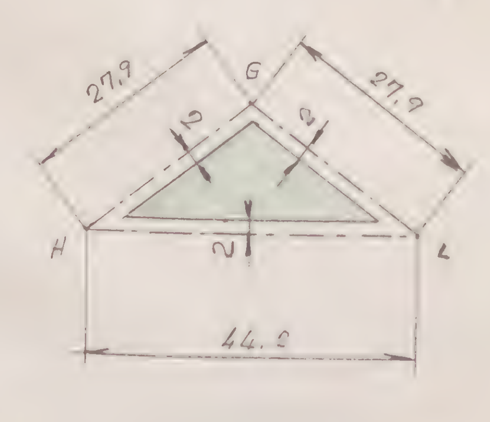
Figura 12

Figura 12

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TIPO (B)

60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 13, y se deducen de las del triángulo isósceles HGL de la figura 5.



PIEZA Nº 8 60 (u)

Figura 13

Figura 13

Talavera Febrero 1980



Modelo M-51.1

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

Del estudio anterior, se deduce la forma de obtención del modelo corpóreo del poliedro regular estrellado de séptima especie, de veinte caras triangulares y doce vértices de ángulo pentaédrico de segunda especie. Los vértices de estos ángulos pentaédricos, son a su vez vértices de doce pirámides, siendo equidistantes del centro "O" del poliedro.

Si unimos cada uno de los vértices anteriores, con los cinco que los rodean, más cercanos al mismo, los segmentos correspondientes son todos de igual longitud, y son aristas "a_{20}" de un icosaedro regular convexo inscrito en la esfera de radio "r_{ec}^{20E}" que es a su vez esfera circunscrita al poliedro estrellado.

La arista "a_{20}" de dicho icosaedro, ha sido obtenida en este ejercicio (ver fórmula (1), hoja 5); su valor es:

$$\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} \cong 1,0514622 4\ldots \times 110 \cong \boxed{115,7 \text{ mm}}$$

Para obtener el modelo corpóreo de este estudio complementario, puede utilizarse este mismo modelo M-51.1, completándolo con las treinta aristas del icosaedro $a_{20} = 115.7$ mm. Esto es lo que hemos realizado en el mismo.

Alvarez Febrero 1980



MODELO M - 51.1

PATRÓN FIGURA 6

E = 1 : 1



Icosaedro regular estrellado de caras triangulares convexas, doce vértices de ángulos pentaédricos estrellados.

Lado del icosaedro regular inscrito en la esfera de radio a = 11[illegible]

l_{20} = 110 : 0.95 10 57... = 115,7 mm.

Diagonal del pentágono regular de lado l_{20} = al lado del triángulo equilátero de la cara del icosaedro regular estrellado:

[illegible] = 115,7 × 1,61 80 34... = 187,2 mm.

[illegible]

[illegible] 115,7 × 0,85 06 51... = 98,4 mm.

Magnitud "p"

p = 115,7 × 0,61 80 34... = [illegible]

A

O

B

Desarrollo incorrecto: $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ no deben estar en línea recta

Magnitud "q"

q = 115.7 × 0,38 1966... = [illegible]

[illegible]

Icosaedro regular estrellado de caras triangulares convexas, doce vértices de ángulos pentaédricos estrellados.

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-51.1, DE IGUAL FORMA, SIENDO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA DE MENOR LONGITUD, Y DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-51.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular estrellado, cóncavo, de caras macizas, de séptima especie, formado por veinte triángulos equiláteros y doce vértices de ángulos pentaédricos de segunda especie, concurriendo en cada uno de dichos ángulos, cinco caras del mismo.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-51.1, de igual forma, siendo de menor longitud el radio de su esfera circunscrita "r_{ec}^{20E}" = 76.1 mm.

Para obtener el despiezo de este modelo, aplicaremos el estudio analítico hecho para el modelo M-51.1, determinando el coeficiente "k" de reducción k = 76.1 : 110, o relación de los radios correspondientes, de sus respectivas esferas circunscritas:

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec}^{20E} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}$$

A continuación presentamos diversas tablas de las longitudes reseñadas en las figuras del modelo M-51.1, y de los valores

UNE A4 210 x 297

Calvarro Febrero - 1980



A		Modelo M-51.2

correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-51.2, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO TOTAL DE UNA PIRÁMIDE PENTAÉDRICA QUE FORMA EL POLIEDRO ESTRELLADO

12 unidades

La figura nº 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
	73.1	50.6
PIEZA Nº 1	71.5	49.5
	27.9	19.3
12 (u)	44.2	30.6

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL EN CARAS TIPO "A"

60 unidades

La figura 7 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
	73.1	50.6
PIEZA Nº 2	71.5	49.5
	27.9	19.3
60 (u)	4	2.5

UNE A4 210 x 297

Tabarés Febrero 1980



PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL EN CARAS TIPO "B"

60 unidades

La figura 8 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº3	44,2	30,6
60 (U)	27,9	19,3
	4	2,5

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 50,6 mm

60 unidades

La figura 9 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 4	71	50,5
	3	2
60 (U)	10°	10°
	36°	36°

UNE A4 210 x 297

Febrero 1980



PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 49,5 mm

60 unidades

La figura 10 ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 10	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 5	69	48
	3	2
60 (u)	10°	10°
	36°	36°

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 19,3 mm

30 unidades

La figura 11, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 11	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	26	18
30 (u)	3	2
	36°	36°

Calvario Febrero 1980



		Modelo M-51.2

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN CARAS TIPO (A)

120 unidades

La figura 12, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 12	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 7	73,1	50.6
	71,5	49,5
120 (u)	27,9	19,3
	2	2

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TIPO (B)

60 unidades

La figura 13, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 13	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 8	42,2	30.6
60 (u)	27,9	19,3
	2	2

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1980



$\operatorname{tg} \alpha = 0.7746$ B

A

O

B

Desarrollo incorrecto.
$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ no deben estar alineados.

$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15} - 2\sqrt{3}$

$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$\alpha = 37^\circ\ 45'\ 40''\ 478$

$\beta = 32^\circ\ 14'\ 19''\ 521764$

VARIANTE DEL MODELO M-51.2 DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, PERO DE CARAS VACIADAS

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-51.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular estrellado, cóncavo, de caras vaciadas, de séptima especie, formado por veinte triángulos equiláteros y doce vértices de ángulos pentaédricos de segunda especie, concurriendo en cada uno de dichos ángulos cinco caras del mismo.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-51.2, de igual forma y dimensiones, pero de caras vaciadas.

Para obtener el despiece de este modelo, aplicaremos el estudio analítico hecho para el modelo M-51.1, y las figuras del mismo, en las que tabularemos las dimensiones de las cotas modificadas, para poder dibujar las distintas piezas de su despiece, al reducirlas de tamaño en este modelo.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ee}^{20E} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}$$

Las piezas necesarias para la construcción de este modelo, son las siguientes:

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1980



PIEZA Nº 1 DESARROLLO TOTAL DE UNA PIRÁMIDE PENTAÉDRICA QUE FORMA EL POLIEDRO ESTRELLADO

12 unidades

La figura nº 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
	73.1	50.6
PIEZA Nº 1	71.5	49.5
	27.9	19.3
12 (u)	44.2	30.6

Esta figura 6, se completará con el contorno del vaciado de sus caras, que estará distanciado 2.5 mm de los bordes de las mismas.

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL EN CARAS TIPO "A"

No existe en este modelo

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL EN CARAS TIPO "B"

No existe en este modelo

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 50.6 mm

60 unidades

UNE A4 210 x 297

T. Alvarez Febrero 1980



La figura 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
	71	50.5
PIEZA Nº 4	3	2
60 (u)	10°	10°
	36°	36°

PIEZA Nº5 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 49.5 mm

60 unidades

La figura 10, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 10	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
	69	48
PIEZA Nº 5	3	2
60 (u)	10°	10°
	36°	36°

PIEZA Nº6 UNIONES ARISTAS EN LADOS DE 49.3 mm

30 unidades

UNE A4-210 x 297



La figura 11, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 11	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
PIEZA Nº 6	26	18
	3	2
30 (4)	36°	36°

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO EN CARAS TIPO (A)

No existe en este modelo

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TIPO (B)

No existe en este modelo

UNE A4 210 x 297

Febrero 1980

VARIANTE DEL MODELO M-51.1, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, SIENDO EL ICOSAEDRO ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS, Y EL DODECAEDRO REGULAR CÓNCAVO DEL NÚCLEO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 mm.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-51.1, de igual forma y dimensiones, siendo el icosaedro estrellado, de caras vaciadas, y el dodecaedro regular cóncavo del núcleo, de caras macizas.

Las dimensiones de los poliedros componentes de este modelo, son las mismas que las del modelo M-51.1.

Observemos previamente, que este modelo quedan netamente separados el dodecaedro regular estrellado (de caras vaciadas), del núcleo (de caras macizas).

Este núcleo tiene una superficie exterior cuya forma aparente es la de un dodecaedro regular convexo, y sus caras pentagonales no son planas, sino que por el contrario son cóncavas y compuestas cada una de ellas por dos grupos de cinco triángulos isósceles iguales entre sí en cada grupo pero desiguales en los dos grupos; el fondo de dichas caras cóncavas lo constituye un pentágono regular convexo. El borde exterior de este conjunto de caras, es a su vez un pentágono regular convexo plano.

El conjunto de todas las superficies reseñadas anteriormente se representa en la figura 1 proyectado sobre el plano del borde exterior pentagonal regular.

Las dimensiones de estos polígonos (triángulos y pentágonos), las determinaremos seguidamente.



Figura 1

En la figura 1, se representa como base el polígono ABCDE, del borde plano de la cara exterior del nucleo, que es un pentágono regular convexo, cuyo lado $l_5 = 44,2$, se obtuvo en el ejercicio M-51.1 (fórmula 32) h 13.

Las zonas Ⓑ y Ⓓ de la figura 1, son triángulos isósceles que se proyectan oblicuamente sobre el plano ABCDE, y por consiguiente no están representados en su verdadera magnitud. La zona Ⓔ o fondo de la cara cóncava, es un pentágono regular convexo.

Las dimensiones de las zonas Ⓑ, Ⓓ y Ⓔ, son las siguientes:

1) Los cinco triángulos de las zonas Ⓑ, iguales entre sí, son los de la figura 5 del ejercicio M-51.1. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

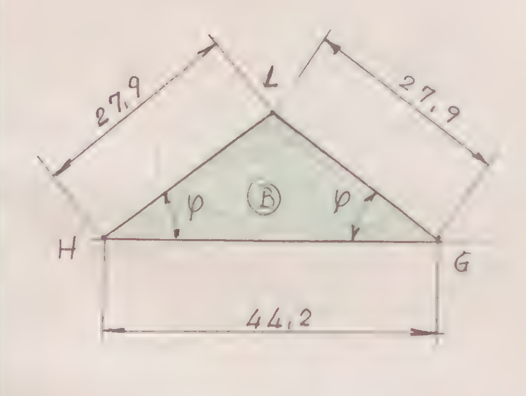


Figura 2

$\varphi = 37^\circ, 76\ 12\ 43\ 9\ldots \cong 37^\circ\ 45'\ 40,5''$

$\sphericalangle\ \widehat{HGL} = 104^\circ, 47\ 75\ 12\ 2\ldots \cong 104^\circ\ 28'\ 37''$

$$2\varphi + \sphericalangle\ \widehat{HLG} = 180^\circ$$

$r_{ec}^{20} = 110$ mm

$\overline{HL} = \overline{LG} = 0,25\ 40\ 08\ 58\ 1\ldots \times r_{ec}^{20} = 27,9$ mm

$\overline{HG} = 0,40\ 16\ 22\ 83\ 2\ldots \times r_{ec}^{20} = 44,2$ mm

2) De los cinco triángulos isósceles ABC, representados en la

UNE A4 210 x 297

figura 3, conocemos los lados iguales AB = AC = 27.9, congruentes a los HL = LG de la figura 2

19.8

B C

(D)

27.9 27.9

A

Figura 3

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{HL} = \overline{LG} = 0{,}25\ 40\ 08\ 58\ 1 \ldots r_{ec}^{20} =$

$= 27{,}9$ mm.

El lado desigual o base BC, se obtiene en la figura 3 del ejercicio M-51.1 (h 7) en la que por el cálculo del segmento MM' del triángulo BMM', nos dará su longitud, por lo que tendremos:

$\overline{BC}$ = MM' en la figura 3 del ejercicio M-51.1 =

$= 2\,\overline{BM}\ \text{sen}\,(30^\circ - \gamma) = 2 \times 0{,}66\ 50\ 03\ 1 \ldots \times \text{sen}\,(30^\circ - \gamma)\, r_{ec}^{20} =$

$= 2 \times 0{,}66\ 50\ 03\ 1 \ldots \times \text{sen}\,(30^\circ - 22^\circ{,}23\ 87\ 56\ 04) \times r_{ec}^{20} =$

$= 0{,}17\ 96\ 11\ 19\ 2 \ldots \times 110 =$ **19,8 mm**

---

3) El pentágono regular convexo de la cara E (fig. 1) o fondo de la cara cóncavo, se representa en la figura 4, siendo su lado $l_5 = 19{,}8$ mm; el radio r_c^5 de su circunferencia circunscrita, será (ver fórmula (3) G.P. 1.400-44)

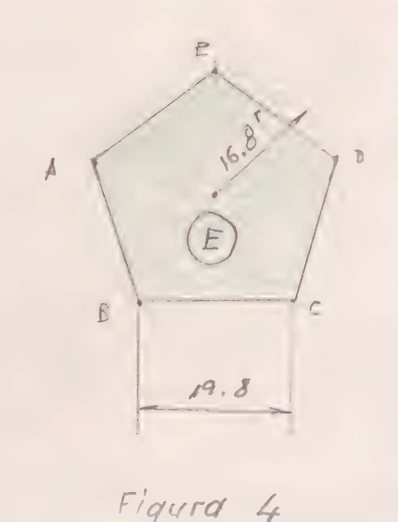
$r_c^5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_5 = 0{,}85\ 06\ 50\ 80\ 8 \ldots \times 0{,}17\ 96\ 11\ 19\ 2 \ldots \times r_{ec}^{20} =$

$= 0{,}15\ 27\ 86\ 60\ 6 \ldots \times 110 =$ **16,8 mm**

UNE A4 210 x 297

Calvarez Marzo 1980





$$\overline{EC} = 0{,}17\ 96\ 11\ 19.2\ldots \times r_{ec}^{20}$$

$$r_5 = 0{,}15\ 27\ 86\ 40\ 6\ldots \times r_{ec}^{20}$$

Figura 4

Como consecuencia de los cálculos anteriores y los realizados en el ejercicio M-51.1, podemos proceder a la construcción del modelo planteado en el presente ejercicio, siendo pues necesarias las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR DE CARAS CÓNCAVAS Y MACIZAS DEL NÚCLEO

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL DE UNA CARA PENTAGONAL CÓNCAVA 12 unidades

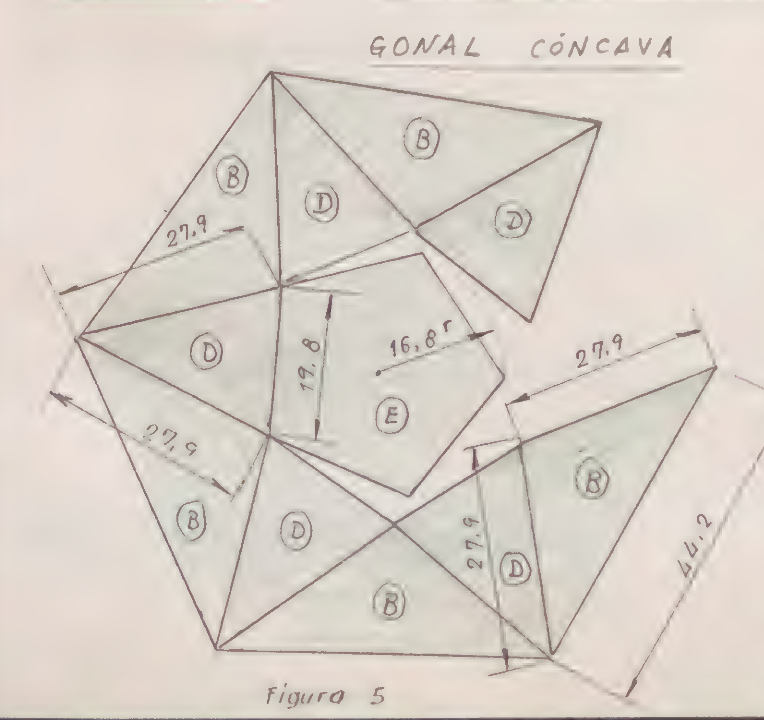


Figura 5

Este desarrollo se compone de 5 triángulos tipo (B); 5 de tipo (D) y un pentágono regular convexo tipo (E); los triángulos (B) y (D) son isósceles. Todos estos polígonos han de estar acoplados como se indica en la fi-



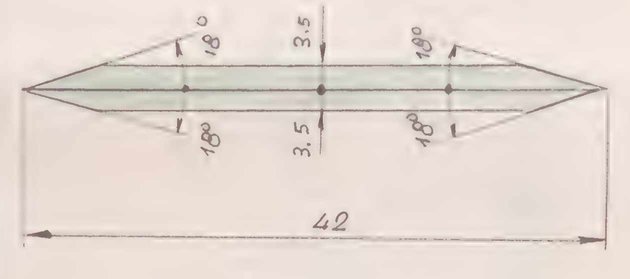
Modelo M- 51.4

gura 5. Todos los dobleces han de hacerse en el mismo sentido (hacia abajo o hacia arriba). PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS DE 44.2 mm 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



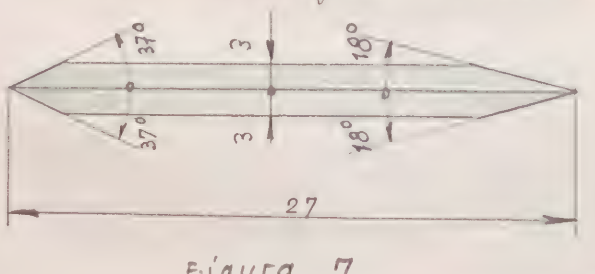
PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE 27.9 mm 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

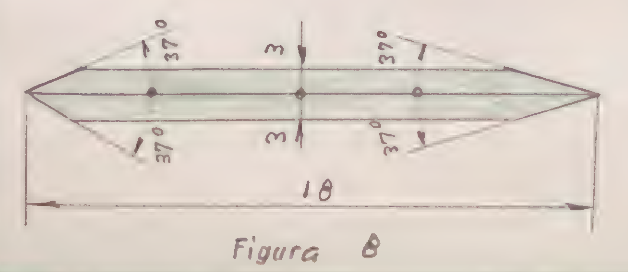


PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DE 16.8 mm 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8



PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 8

Figura 8

UNE A4 210 x 297



B) ICOSAEDRO ESTRELLADO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº5 DESARROLLO LATERAL DE UNA DE LAS DOCE PIRÁMIDES PENTAÉDRICAS QUE FORMAN EL CONTORNO APARENTE DEL ICOSAEDRO ESTRELLADO. 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9, compuesta de 10 caras iguales a las de la figura 4 del ejercicio M-51.1, con su vaciado correspondiente

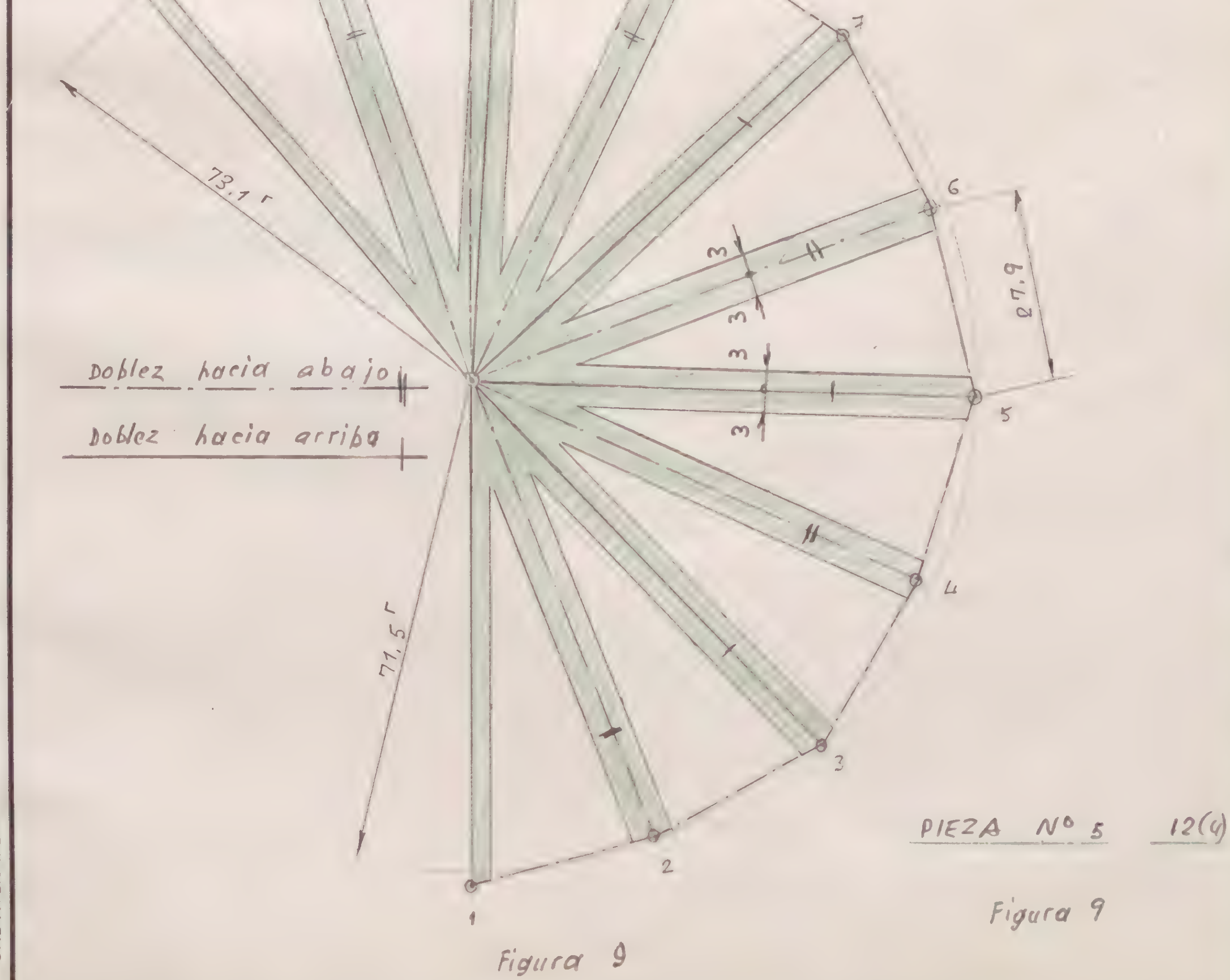


Figura 9

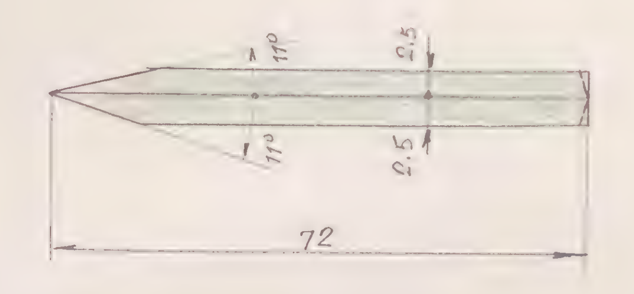
CAlvarez Marzo 1980



Modelo M- 51,4

PIEZA Nº 6 UNIONES EN ARISTAS DE 73.1 mm 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10



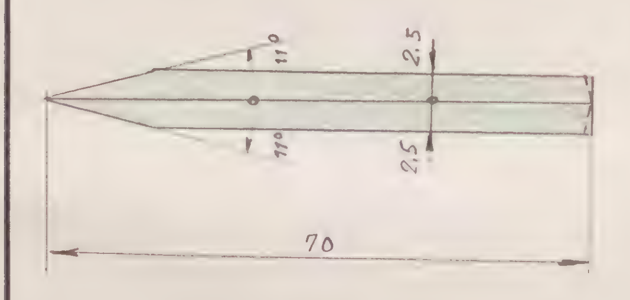
PIEZA Nº 6 60 (u)

Figura 10

Figura 10

PIEZA Nº 7 UNIONES EN ARISTAS DE 71,5 mm 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11



PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 11

Figura 11



PATRONES

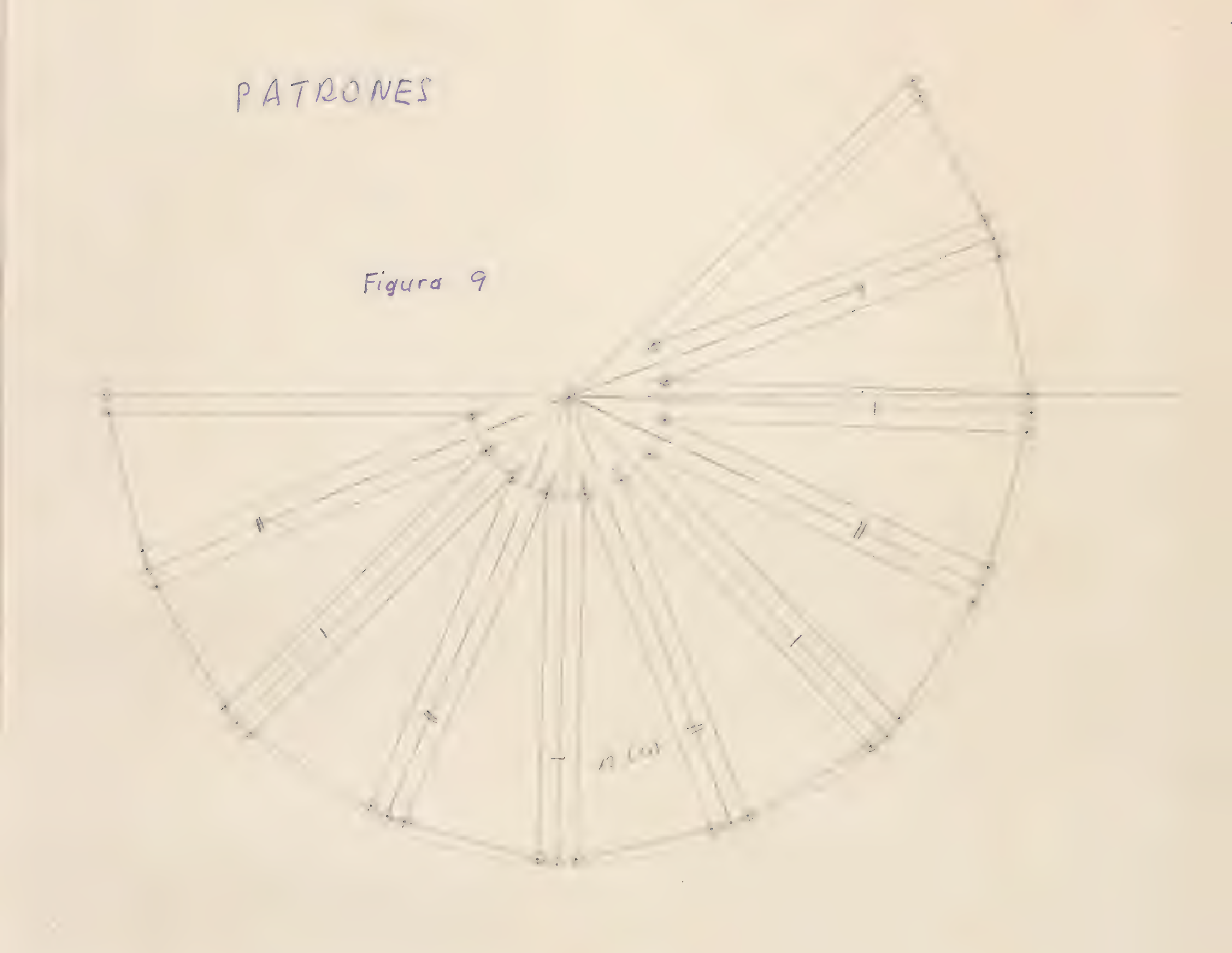


Figura 9

Figura 5

CONSTRUCCION DE POLIEDROS

ARQUIMEDIANO Nº VII

MODELO DE CARAS MACIZAS

Modelo nº 39-6

CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS

ARQUIMEDIANO Nº VII

obtenido del tetraedro regular, por troncadura de sus vértices, tomando 1:3 de la arista de éste, a partir de cada vértice. (ℓ_4 = 107.79 mm)

MODELO DE CARAS MACIZAS EN EL ARQUIMEDIANO VII Y VACIADAS EN EL TETRAEDRO REGULAR.

ENUNCIADO: Construir el poliedro semirregular convexo "Arquimediano VII, (ver lám. 39, ejercicio G.P. 3400-?) obtenido de un tetraedro regular, por troncadura de sus vértices, tomando un tercio de la arista de éste, a partir del vértice.

En el estudio del modelo nº 39-3, vimos que el Arquimediano VII puede deducirse de un tetraedro regular generador, de dos formas diferentes, bien por troncadura de sus caras, o bien por troncadura de sus vértices.

El modelo nº 53, se estudia la obtención del mencionado Arquimediano VII, por troncadura de sus vértices, tomando como dato el radio $r_{C-4} = 110$ mm de la esfera circunscrita al tetraedro generador, de arista $l_4 = 179.63$ mm. y $l_{VII} = 59.9$ mm, la del Arquimediano.

Mas según dedujimos en el desarrollo del modelo nº 52, los arquimedianos obtenidos por troncadura de caras o de vértices de un mismo tetraedro regular de aristas iguales, son desiguales, siendo el mayor el primero que el segundo. Si se desea que el Arquimediano obtenido sea de igual tamaño en ambos, es preciso variar las aristas de ambos.

En el modelo nº 39-3 se obtuvo un Arquimediano, de arista $l_{VII} = 35.93$ mm, partiendo de un tetraedro regular de arista $l_4 = 179.63$, por troncadura de sus caras

En el modelo nº 39-4 se obtuvo un Arquimediano, de arista $l_{VII} = 59.88$ mm, partiendo de un tetraedro regular de arista $l_4 = 179.63$ mm por troncadura de sus vértices.

UNE A4 210 x 297

[signature] Octubre 1977



Modelo nº 39-6

En este modelo nº 39-6 vamos a obtener un Arquimediano de arista l_{VII} = 35.93 m m, partiendo de un tetraedro regular de arista $l_4 = 3 \times 35.93 = 107.79$ m m., por troncadura de sus vértices (análogo al del modelo nº 53), a fin de conseguir que el Arquimediano resultante sea del mismo tamaño del del modelo nº 39-3

El radio r_{c-4} de la esfera circunscrita a este tetraedro, será pues (ver fórm. ?)

$$r_{c-4} = \frac{\sqrt{6}}{4} \times l_4 = \frac{\sqrt{6}}{4} \times 107.79 = 66.01 \text{ mm.}$$

La relación de las aristas de los dos tetraedros generadores y la de los radios de las respectivas esferas circunscritas, es de

$$\frac{107.79}{179.65} = \frac{66{,}01}{110} = \frac{3}{5} = 0.6$$

UNE A4 210 x 297

Octubre 1974



Modelo de caras macizas en el Arquimediano VII y vaciadas en el tetraedro regular

Modelo nº 39-6

ARQUIMEDIANO VII

1. Cara tetraedro generador 4 (U)

1 4 (U)

2
5
4
13
4 (U)

107.79
35.93
35.93
35.93

1.1 4 (U)
1.2 4 (U)

2. Cara triangular Arquimediano 4 (U)

2 4 (U)
2.1 4 (U)
1
2
5
2.2 4 (U)
35.93

2
33.5
2
33.5

5
30.5
5
30.5

1.2 Forro coloreado 4 (U)

1.1 Refuerzo normal interior 4 (U)

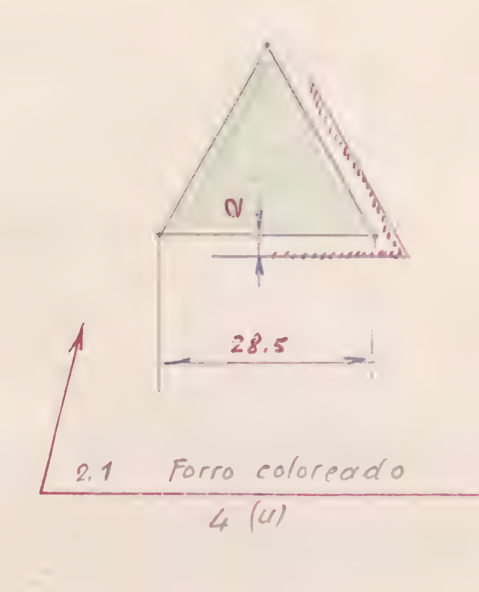
UNE A4 210 x 297

Octubre - 1977

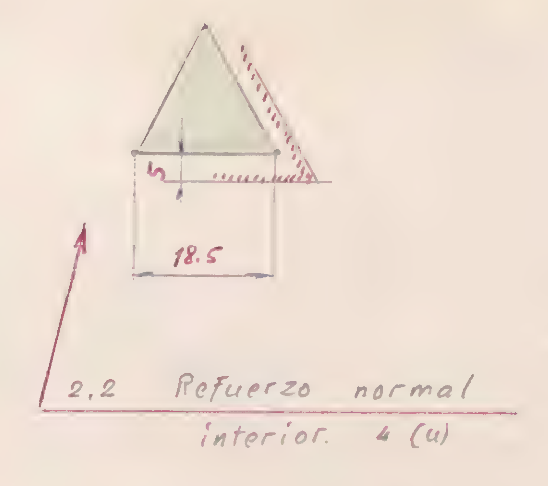


	Modelo de caras macizas en el Arquimediano VII y vaciadas en el tetraedro regular	Modelo nº 39-6

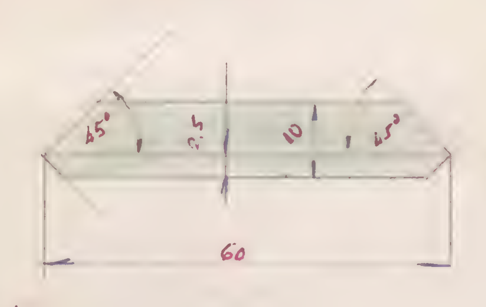
ARQUIMEDIANO VII

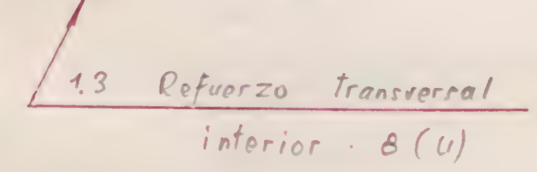


2.1 Forro coloreado
4 (u)

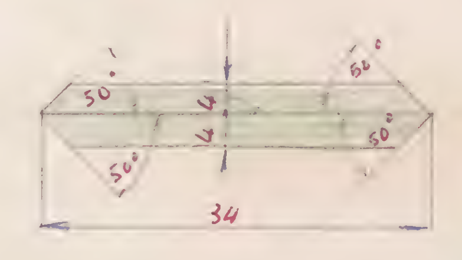


2.2 Refuerzo normal interior. 4 (u)

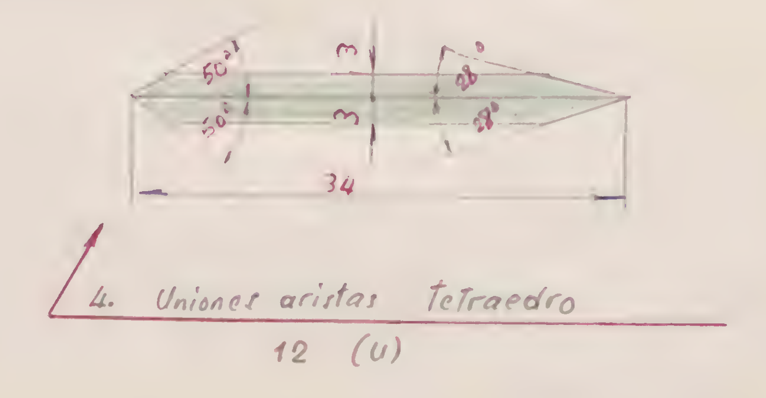




1.3 Refuerzo transversal interior. 8 (u)



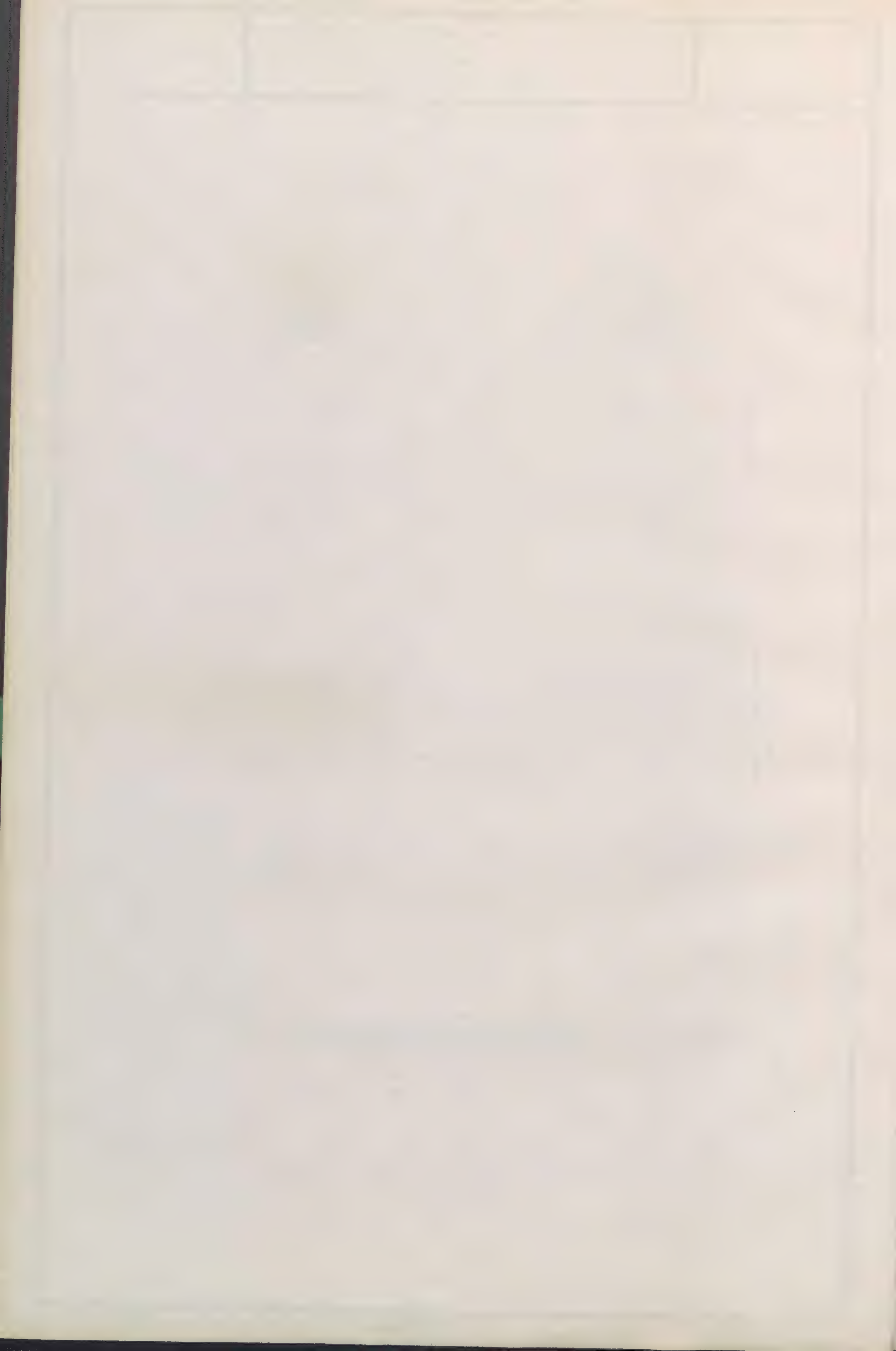
3. Uniones aristas Arquimediano
18 (u)



4. Uniones aristas tetraedro
12 (u)

UNE A4 210 x 297

Octubre - 1977



	Modelo de caras macizas en el Arquimediano VII y vaciadas en el tetraedro regular	Modelo nº 39-6

ARQUIMEDIANO VII

Material necesario para la construcción de un modelo de caras macizas en el Arquimediano VII y vaciadas en el tetraedro regular

A) Caras del tetraedro generador	Marca	1	4 unidades
B) Caras del Arquimediano VII			
Caras triangulares:			
Refuerzo normal interior:	"	2	4 id.
Caras exagonales:			
Refuerzo normal interior:	"	1.1	4 id.
Refuerzo transversal interior:	"	1.3	8 id.
C) Uniones aristas			
Aristas tetraedro generador:	"	4	12 id.
Aristas Arquimediano VII	"	3	18 id.
D) Forro coloreado			
En caras triangulares	"	2.1	4 id.
En caras exagonales	"	1.2	4 id.

NOTA: Este modelo es análogo al modelo nº 53, y representa la obtención del Arquimediano VII, por truncadura de los vértices de un tetraedro regular, inscrito en una esfera de radio $r_{c-4} = 66,01$ mm (arista del tetraedro $l'_4 = 107.79$ mm). Las aristas de los dos tetraedros, para el mismo Arquimediano, están en la relación 3:5

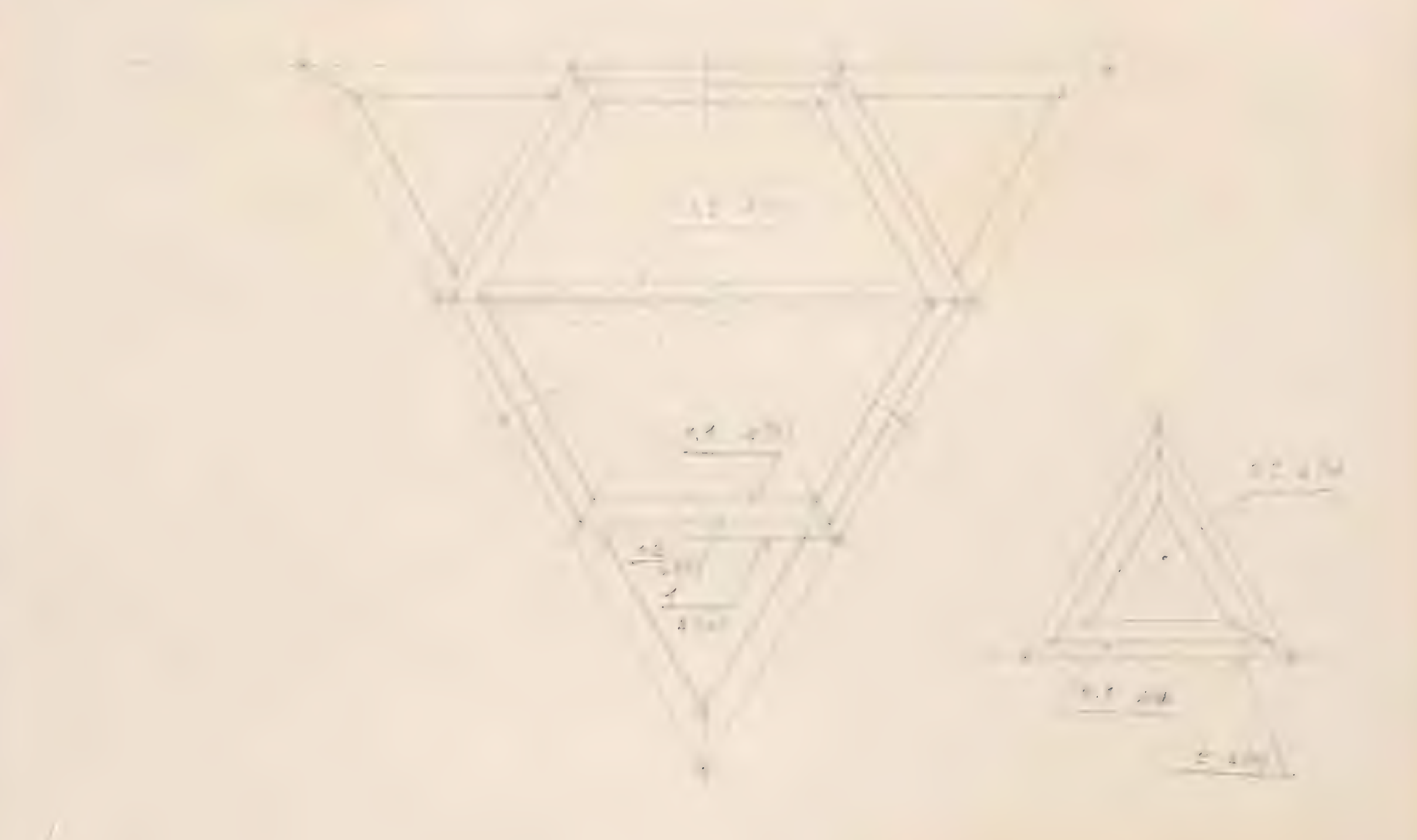
[firma] Octubre - 1977

UNE A4 210 x 297



MODELO Nº 39-6

Arquimediano VII obtenido del tetraedro regular, por troncadura de sus vértices, tomando un tercio del lado de éste, a partir de cada vértice



Modelo de caras macizas en el Arquimediano VII y vaciadas en el tetraedro regular

CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS

ARQUIMEDIANO Nº VII

obtenido como sólido común de la intersección de dos tetraedros regulares, de centro y alturas coincidentes. Las aristas de ambos tetraedros están en la relación 3:5, y los vértices de los mismos serán situados sobre sus alturas respectivas con magnitudes iguales a los $\frac{3}{4}$ de las mismas, a partir de su centro común y en direcciones opuestas.

MODELO DE CARAS MACIZAS EN EL ARQUIMEDIANO VII Y VACIADAS EN LOS DOS TETRAEDROS REGULARES. -

	Ejercicios de construcción de poliedros ARQUIMEDIANO VII	MODELO 39-7

ENUNCIADO: Construir el poliedro semirregular convexo "Arquimediano VII" (ver lám. 39, ejercicio G.P. 3400-?) obtenido como sólido común de la intersección de dos tetraedros regulares de centro y alturas coincidentes. Las aristas de ambos tetraedros están en la relación 3:5, y los vértices de los mismos serán situados sobre sus alturas respectivas con magnitudes iguales a los $\frac{3}{4}$ de las mismas, a partir de su centro común y en direcciones opuestas.

Este modelo es análogo a los estudiados en los modelos n.os 39-5 y 39-6.

A) En el modelo 39-5 se obtiene el Arquimediano VII, partiendo de un tetraedro regular, por troncadura de sus caras, al tomar sobre sus aristas las distancias 3:5 a partir de los vértices. La arista de este tetraedro generador es de: $l_4 = 179.63$ mm. La arista del Arquimediano generado es de: $l_{VII} = 35.93$ mm.

B) En el modelo 39-6, se obtiene también el mismo Arquimediano VII, partiendo igualmente de un tetraedro regular (menor que el del A), por troncadura de sus vértices, al tomar 1:3 de la arista de éste, a partir de cada vértice.
La arista de este tetraedro generador es de $l_4 = 107.79$ mm.
La arista del Arquimediano generado, es igual a la del anterior A, y de valor: $l_{VII} = 35.93$ mm.

UNE A4 210 x 297

[illegible] [illegible] - 1977



c) En el modelo nº 39-7, que estamos desarrollando, obtenemos el mismo Arquimediano VII, como intersección de los dos tetraedros generadores A) y B) de los modelos 39-5 y 39-6, respectivamente, con las condiciones de situación mutua que se fijan en el enunciado.

El resultado es un modelo análogo al nº 39-5, con la variante de tener macizas las caras del Arquimediano VII, y vaciadas las de los dos tetraedros generadores.

Las dimensiones de los dos tetraedros generadores, son las siguientes:

1) Tetraedro mayor:

$$\left\{\begin{array}{l} l_4 = 179,63 \text{ mm} \\ r_{c-4} = 110 \text{ mm} \\ h_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} l_4 = 146,67 \end{array}\right\} = \text{Altura}$$

2) Tetraedro menor:

$$\left\{\begin{array}{l} l_4 = 107.77 \text{ mm} \\ r_{c-4} = 66.07 \text{ mm} \\ h_4 = 88.01 \text{ mm} \end{array}\right\} \text{Altura}$$

3) Arquimediano VII

$$\left\{\begin{array}{l} l_{VII} = 35.93 \text{ mm} \\ r_{c-v} = 49.13 \text{ mm} \end{array}\right\}$$



	Modelo de caras macizas en el Arquimediano VII y vaciadas en los dos tetraedros regulares.	MODELO Nº 39-7

ARQUIMEDIANO VII

Material necesario para la construcción de un modelo de caras macizas en el Arquimediano VII y vaciadas en los dos tetraedros generadores.

Del modelo nº 39-3 se [illegible] los siguientes elementos:

A) Caras del tetraedro mayor	Marca 1	4 unidades
B) Caras del Arquimediano VII		
Caras triangulares:	" 2	4 id.
Refuerzo normal interior:	" 2.2	4 id.
Caras exagonales:	" 3	4 id.
Refuerzo normal interior:	" 3.2	4 id.
Refuerzo transversal interior:	" 3.3	8 id.
C) Uniones aristas:		
Aristas tetraedro:	" 4	6 id.
Aristas Arquimediano:	" 5	18 id.
D) Refuerzos:		
Suspensión Arquimediano:	" 6	12 id.
E) Forro coloreado:		
En caras triangulares:	" 2.1	4 id.
En caras exagonales:	" 3.1	4 id.
F) Del modelo 39-5:	" 4	4 id.
	" 4.1	12 id.



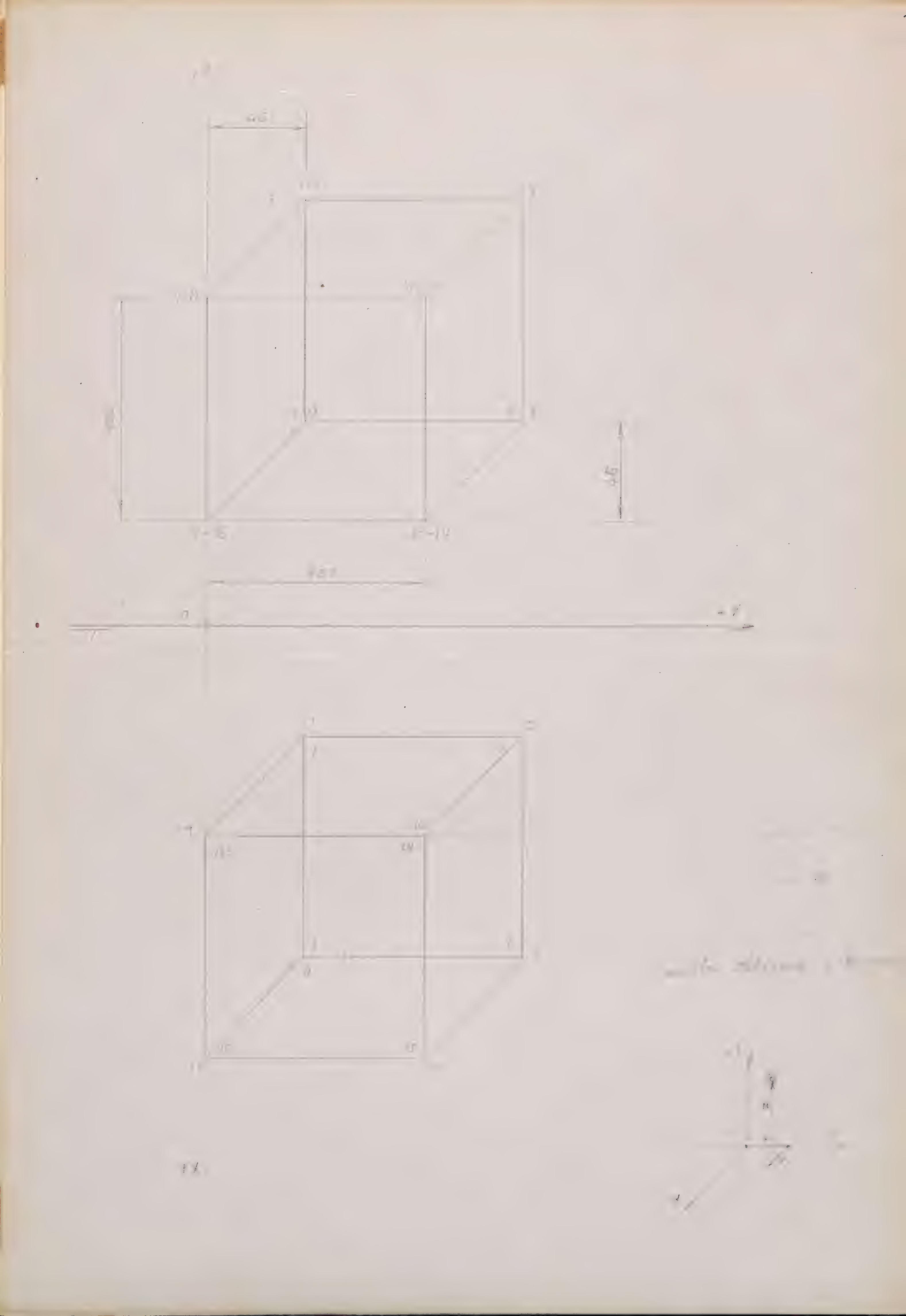
MODELO Nº 3-3

Modelo de caras macizas en el octaedro regular y [illegible] en el tetraedro generador.

1. - Cara octaedro 8 (u)

[illegible] do 8 (u)

Octaedro regular convexo, obtenido del tetraedro regular por truncadura de sus vértices, tomando el centro de cada arista de aquel.



Estudio del poliedro semi-regular, formado ... de

1) 12 pentágonos regulares estrellados de 2ª especie

y de

2) 20 triángulos equiláteros.



Cálculo

Radio de la esfera circunscrita: $a = 110$ mm

l_{12} = Lado del dodecaedro regular inscrito $= \dfrac{110}{1,40\ 12\ 59} =$

$= 78,50$ mm

d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de una cara del dodecaedro:

$= 78,5 \times 0,85\ 06\ 51 = 66,78$ mm



Estudio del poliedro cóncavo, obtenido al construir sobre cada cara de un dodecaedro regular, una pirámide pentagonal regular, cuyas caras son triángulos equiláteros.

A) Vértices de las pirámides tomados hacia el exterior de las caras del dodecaedro

l_{12} = lado del dodecaedro regular

l_3 = lado de las caras triangulares regulares

$$l_{12} = l_3$$

k_5 = apotema del pentágono regular de lado l_{12}

$$k_5 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\; l_{12} = 0.68\ 81\ 92 \ldots\ l_{12}$$

h_3 = altura de una cara triangular de lado l_3

$$h_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\; l_3 = 0.86\ 60\ 25 \ldots\ l_3$$

h = altura de la pirámide pentagonal regular de lado l_3

$$h = \sqrt{(h_3)^2 - (k_5)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, l_3\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_{12}\right)^2} = (\text{cuando } l_3 = l_{12}) =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{15 - 5 - 2\sqrt{5}}{20}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l_{12} =$$

$$= 0.52\ 57\ 31 \ldots\ l_{12}$$

c_{12} = radio de la esfera inscrita al dodecaedro regular de lado l_{12}

$$c_{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\; l_{12} = 1.\ 11\ 35\ 16 \ldots\ l_{12}$$

$\underline{a}$ = radio de la esfera circunscrita al poliedro estudiado, que pasa por los vértices de las pirámides.

$$a = c_{12} + h = \left[\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \right] l_{12} = (1.11\,35\,16 + 0.52\,57\,31)\, l_{12}$$

$$= 1.63\,92\,47 \ldots\, l_{12}$$

Para $\begin{cases} a_{12} = 76,1 \text{ mm.} \\ l_{12} = 54,3 \text{ mm} \end{cases}$ $l_{12} = \dfrac{76,1}{1,40\,13\,59} = 54,3$ mm.

Para $\begin{cases} c = 76.1 \text{ mm} \\ l'_{12} = 46,4 \text{ mm} \end{cases}$ $l'_{12} = \dfrac{76,1}{1.63\,92\,47} = 46,4$ mm.

46.4 mm. es el lado del poliedro a construir (radio de la esfera circunscrita = 76.1 mm)

Nota: Este poliedro es muy parecido al representado en la Lámina 32, pero ¡no igual!.- (Dos caras contiguas no están en el mismo plano)

l

l_{12}

$l_{12} > l$



B) Vértices de las pirámides tomados hacia el interior de las caras del dodecaedro.

Se obtiene un poliedro cóncavo en el que dos aristas no contiguas de las cinco pirámides que rodean a cada cara del dodecaedro, forman un pentágono plano regular estrellado de segunda especie; este pentágono estrellado se deriva a su vez de uno regular cuyo lado es la diagonal de la cara del dodecaedro dado. (ver figura 1)

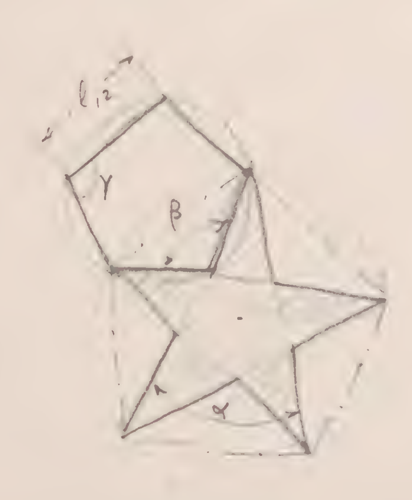


Figura 1

$$\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{5} + 2 \times \frac{360^\circ}{5}\right) = 108^\circ$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(3 \times \frac{360^\circ}{5}\right) = 108^\circ = \beta$$

Este poliedro se deriva a su vez del "dodecaedro regular estrellado de caras pentagonales estrelladas y doce vértices de ángulos triedros" considerando todas las aristas de éste y las del dodecaedro regular de vértices coincidentes con los del estrellado.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (2)

[illegible] (2)

[illegible] (2)

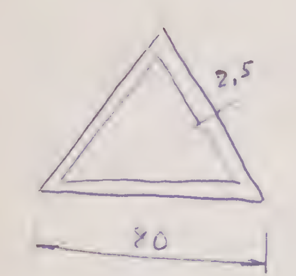
[illegible] (2)

[illegible] (2)

[illegible] (4)

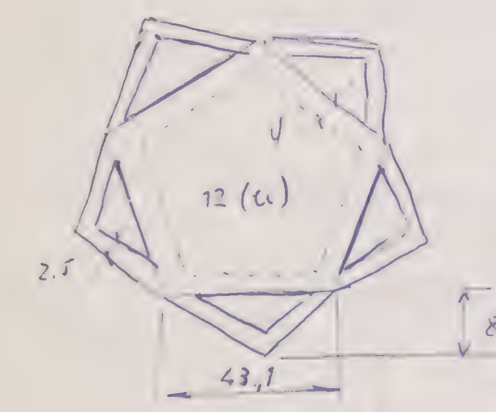
$r_1 = 76,1$ mm

h.



20 (u)

2
2
78
30 (u) ✗

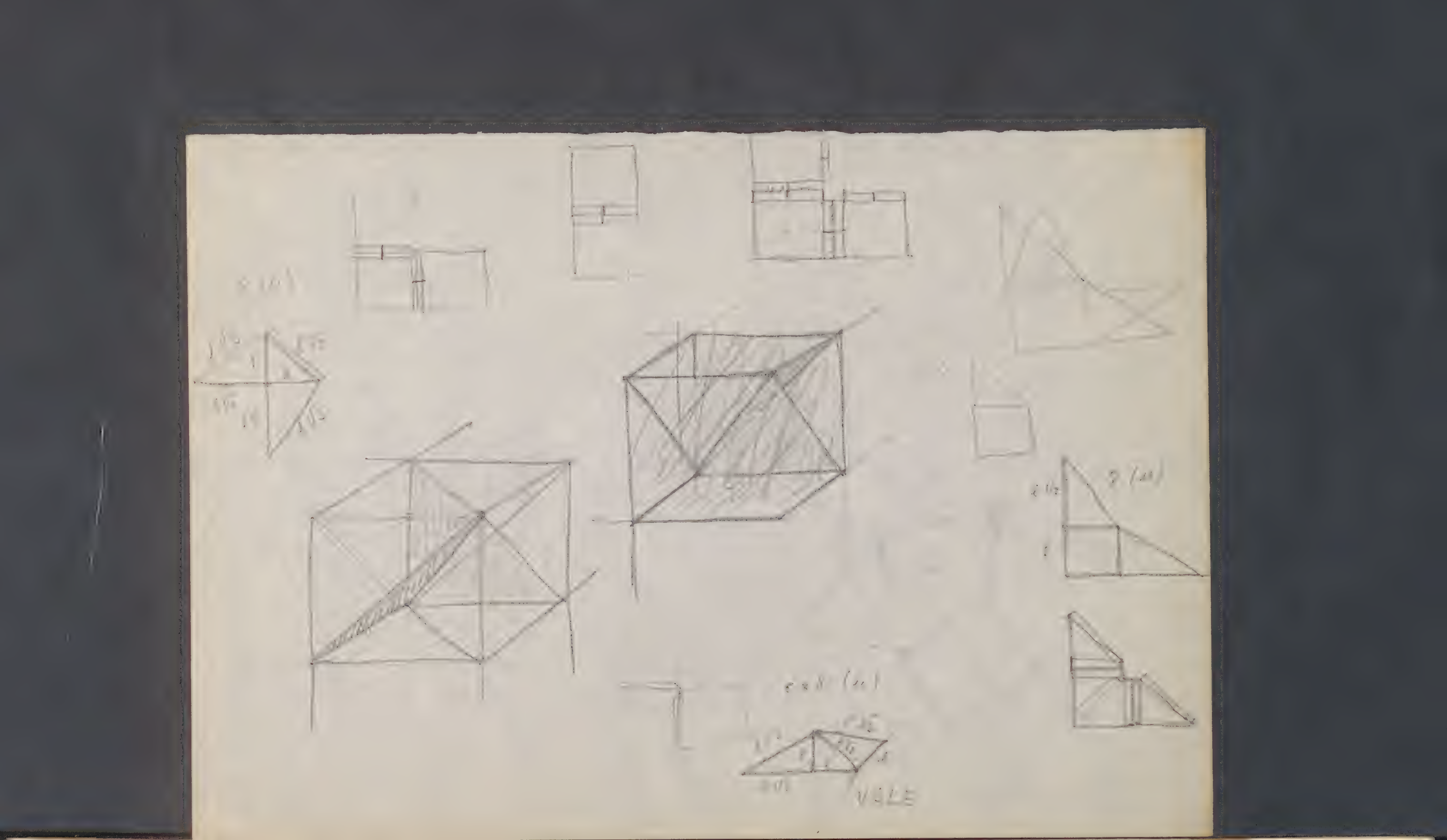


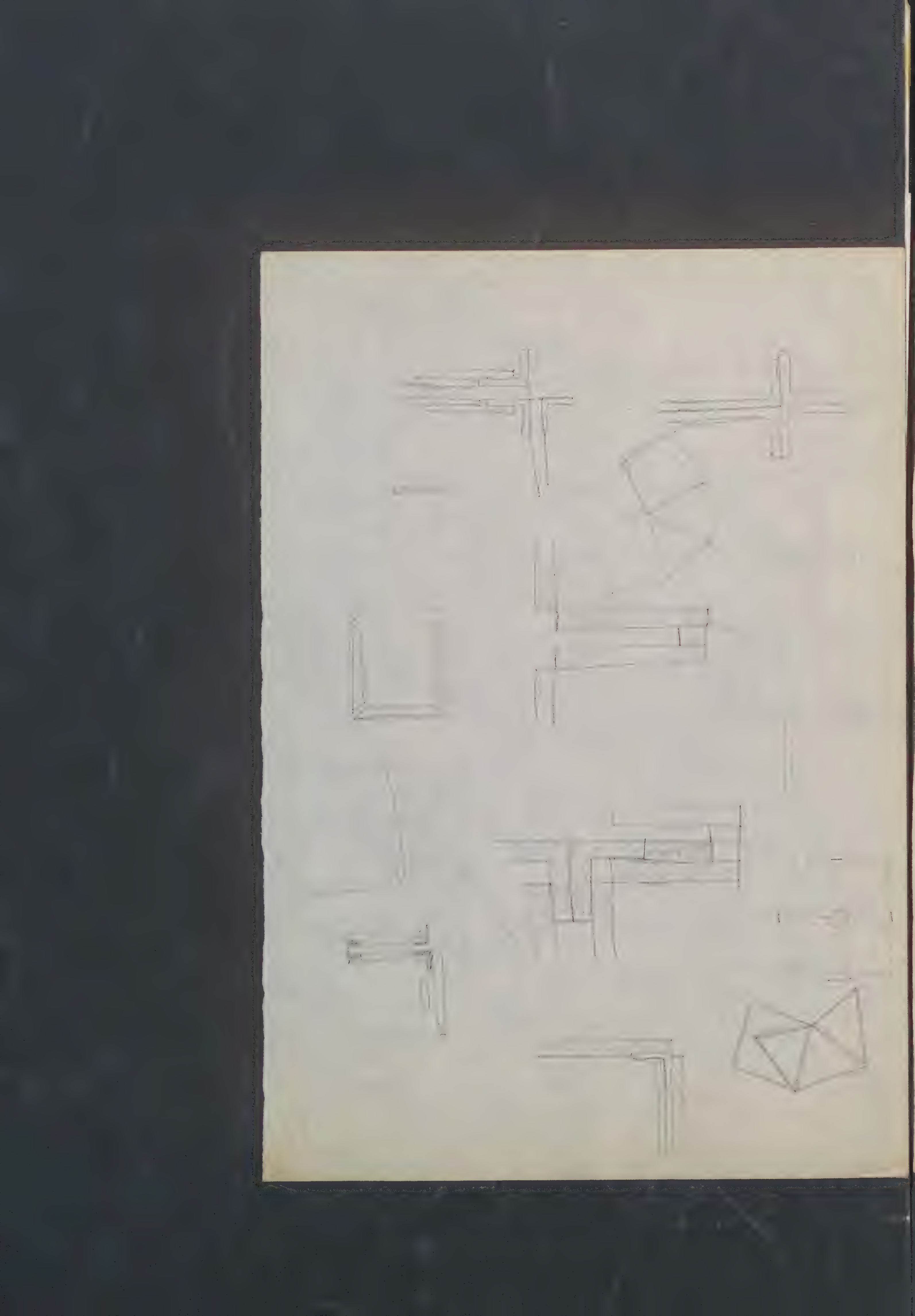
3
3
41,5
30 (u) ✗

$$h = b_{20} - b_{12} = \begin{cases} 0,809 \times 80 = 64.72 \\ 1,309 \times 43,1 = 56,42 \end{cases}$$

$$8,30$$

$k =$ [illegible] $\quad d = 30,6$





Tetraedro y componentes [illegible]

Un tetraedro macizo

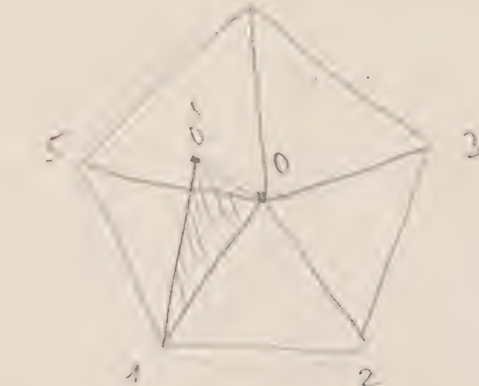
1 triang. de 124,3 mm.
4 refuerzos
6 pestañas de 6 × 100

---

4 pirámides macizas sin base

de 3 triang. de 62,1 mm.
24 pestañas de 6 × 60 mm.
12 refuerzos. Δ

Penta dodecaedro. – Poliedro de 60 caras obtenido al proyectar el centro de cada cara de un dodecaedro regular, sobre la esfera circunscrita al mismo, y desde su centro.



$$r_1 = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} = 1{,}40\ 12\ 59\ l_{12}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} = 1{,}11\ 35\ 16\ l_{12}$$

$$r_4 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\, l_{12} = 0{,}85\ 06\ 51\ldots\ l_{12}$$

$$00' = r_1 - r_2 = 76{,}1 - 60{,}5 = 15{,}6 \text{ mm.}$$

$= 0{,}28\ 77\ 43\ l_{12} =$

$l_{12} = 54{,}3$ mm

$r_4 = 01 = 46{,}2$ mm

$r_1 = 76{,}1$ mm

$r_2 = 60{,}5$ mm

$$1.0' = \sqrt{46{,}2^2 + 15{,}6^2} = \underline{48{,}76} \text{ mm}$$

21 34.44
2 43.36
23 77.80





[illegible]

1) [illegible] sólido [illegible]

2) Id. [illegible]

3) [illegible] sólido por [illegible] del cubo

4) Id. sólido con id. del octaedro

5) Id. sólido con id. del cubo y oct.

---

a) = 76,1 mm.

$$l_4 = \frac{76.1}{0,6123} = 124,3 \text{ mm}$$

Para 1 y 2

$l'_8 = 62,1$ mm.

16 △ de 62,1

12 [illegible] de 3 [illegible]

<u>Para 3, 4 y 5</u>

$l'_8 = 107,6$ mm.

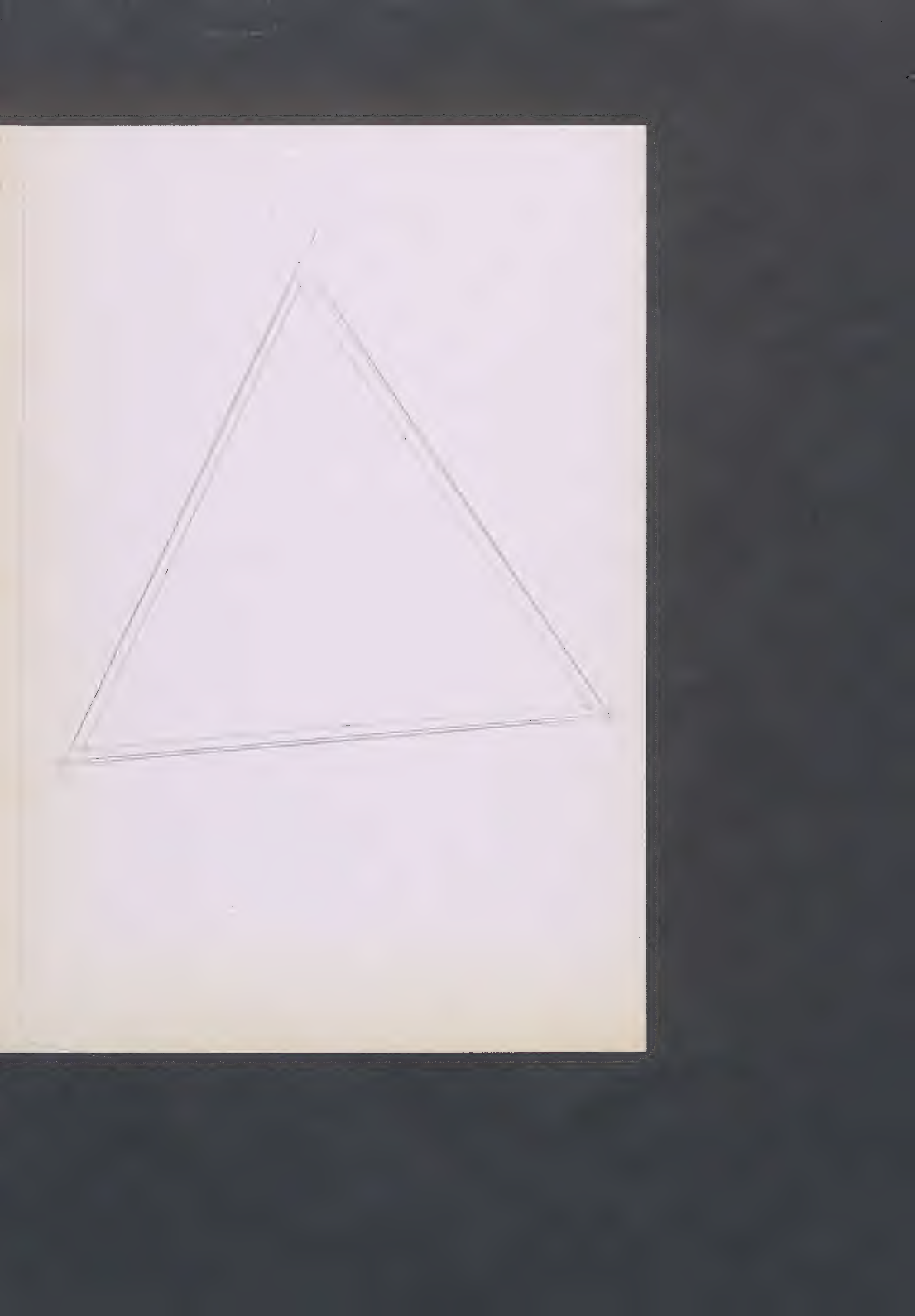
3 [illegible]

6 × 3 = 18 □ de 53,8 mm. de lado

8 × 3 = 24 △ id. 53,8

2 × 8 = 16 [illegible] de 3 [illegible]

2 × 6 = 12 [illegible] de 4 [illegible]



Ang. II, – $2\,c_x = 140$ }
$l_x = 35$ }

$c_I = 70$ $l_I = 52.9$ } —— $d_I = 53.5$

$c_{II} = 70$ $l_{II} = 95.3$ } $d_{II} = 30.-$

$R_{II} = 98.1$ $s_{II} = 76$ mm

124.3
12.1

43.95

73.5

lado [illegible] = 54,3 m

radio "a" [illegible]

[illegible]

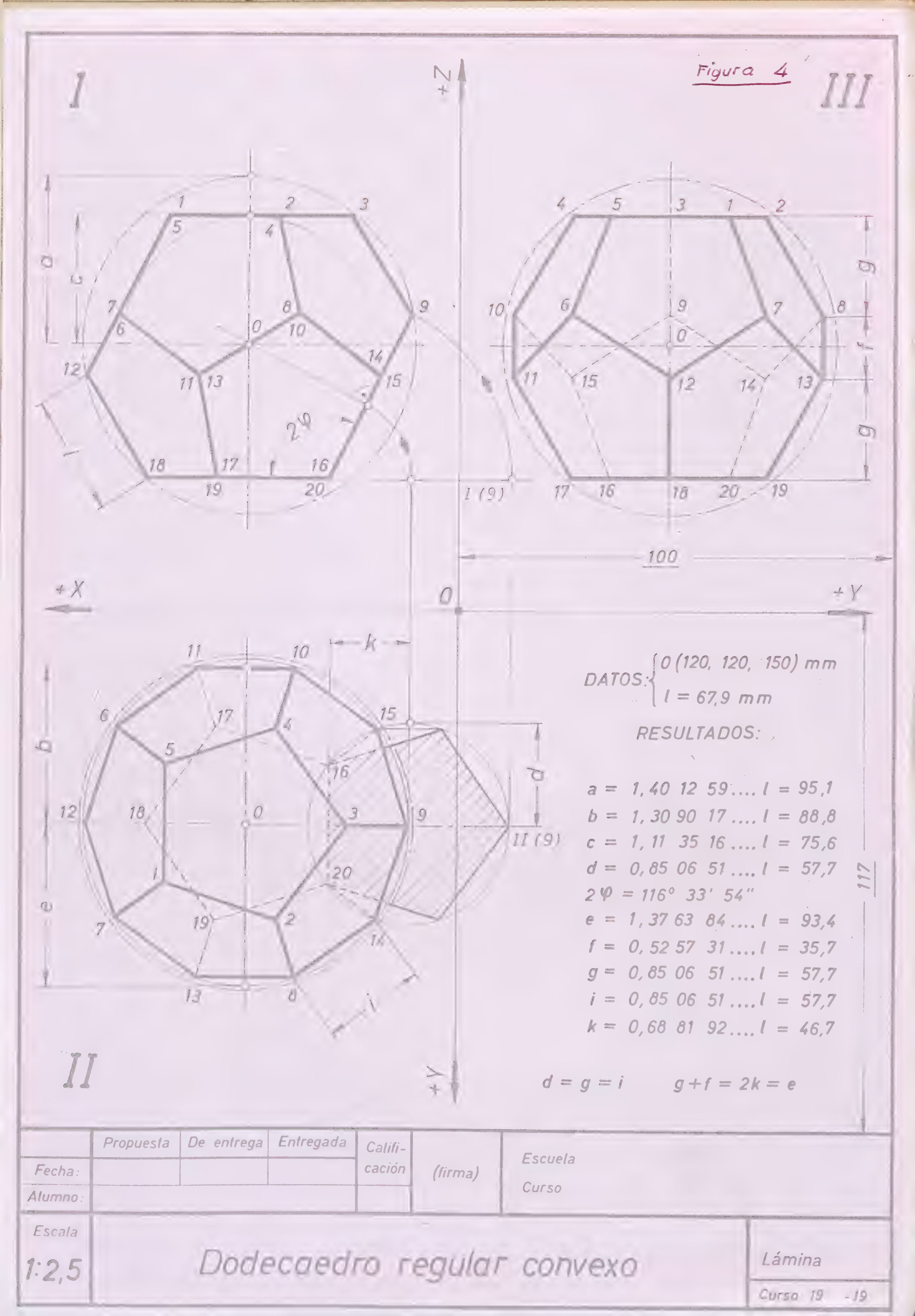
a = 1,40 12 59 × 54,3 =

1,40 12 59..

[illegible] ESFERICA derivada del

[illegible]




Figura 4
I
II
III
+Z
+X
+Y
0
100
117
1 (9)
II (9)
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm
l = 67,9 mm
RESULTADOS:
a = 1,40 12 59 .... l = 95,1
b = 1,30 90 17 .... l = 88,8
c = 1,11 35 16 .... l = 75,6
d = 0,85 06 51 .... l = 57,7
2φ = 116° 33' 54"
e = 1,37 63 84 .... l = 93,4
f = 0,52 57 31 .... l = 35,7
g = 0,85 06 51 .... l = 57,7
i = 0,85 06 51 .... l = 57,7
k = 0,68 81 92 .... l = 46,7
d = g = i
g + f = 2k = e
Propuesta
De entrega
Entregada
Califi-cación
(firma)
Fecha:
Alumno:
Escuela
Curso
Escala
1:2,5
Dodecaedro regular convexo
Lámina
Curso 19 - 19

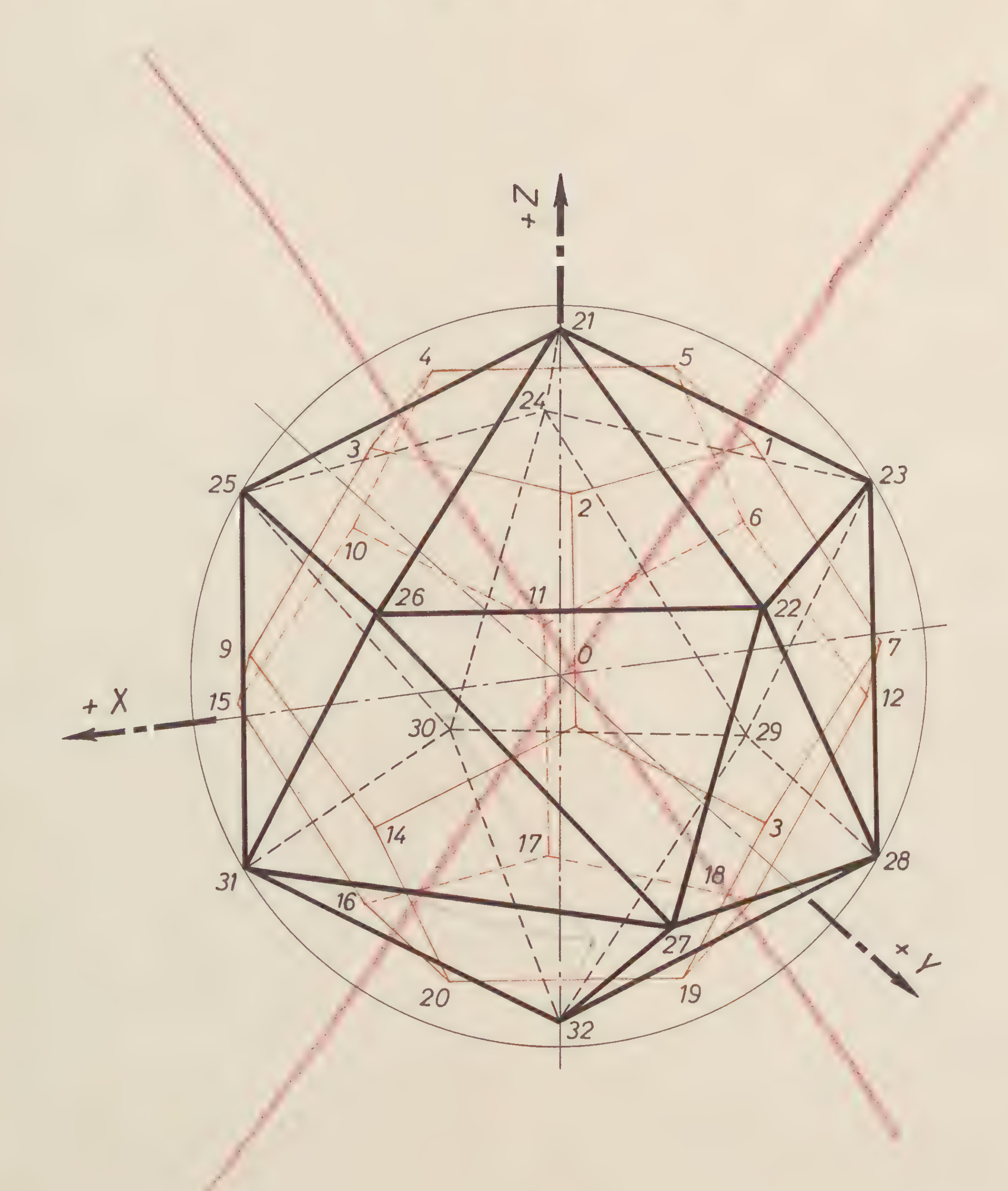




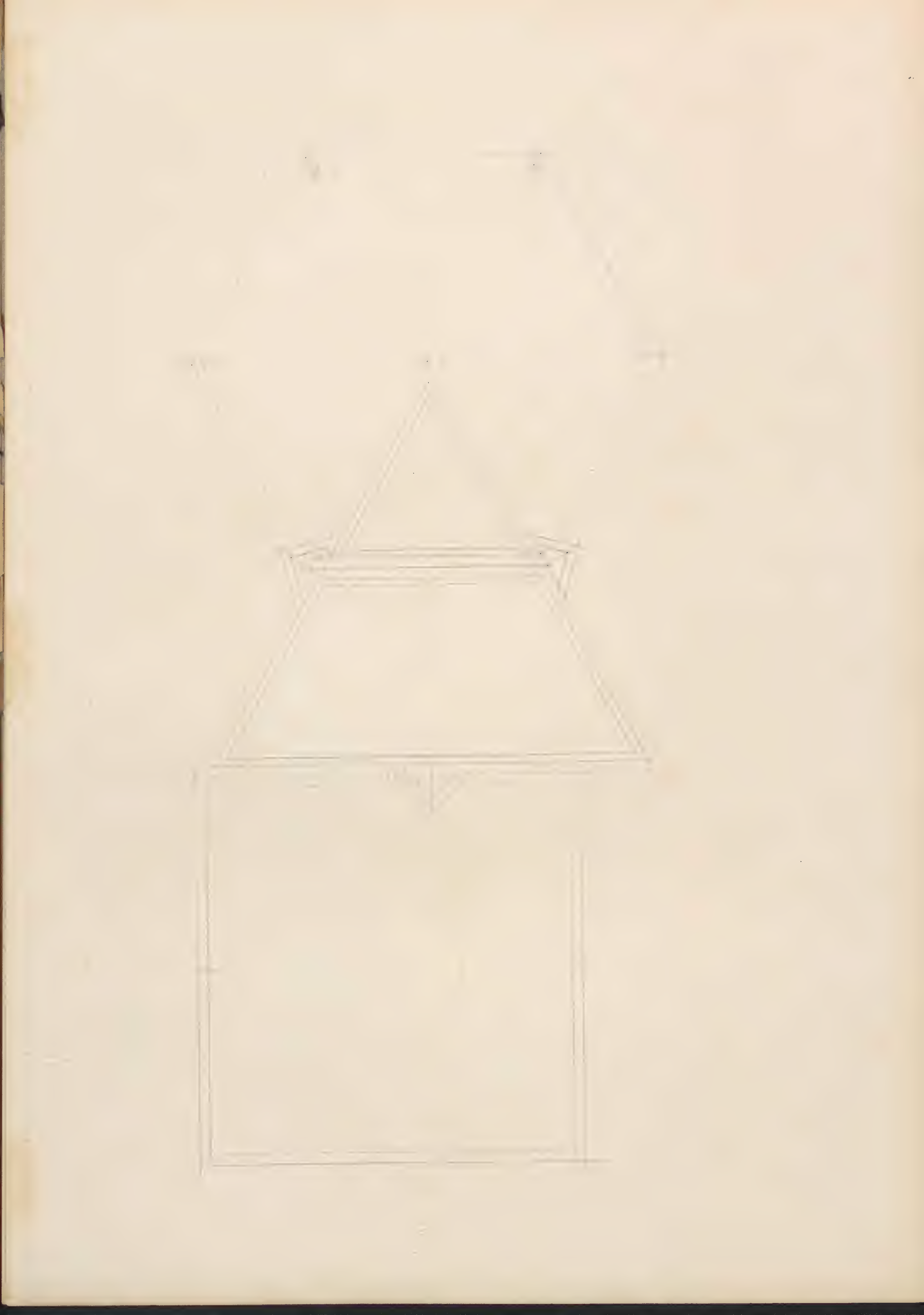


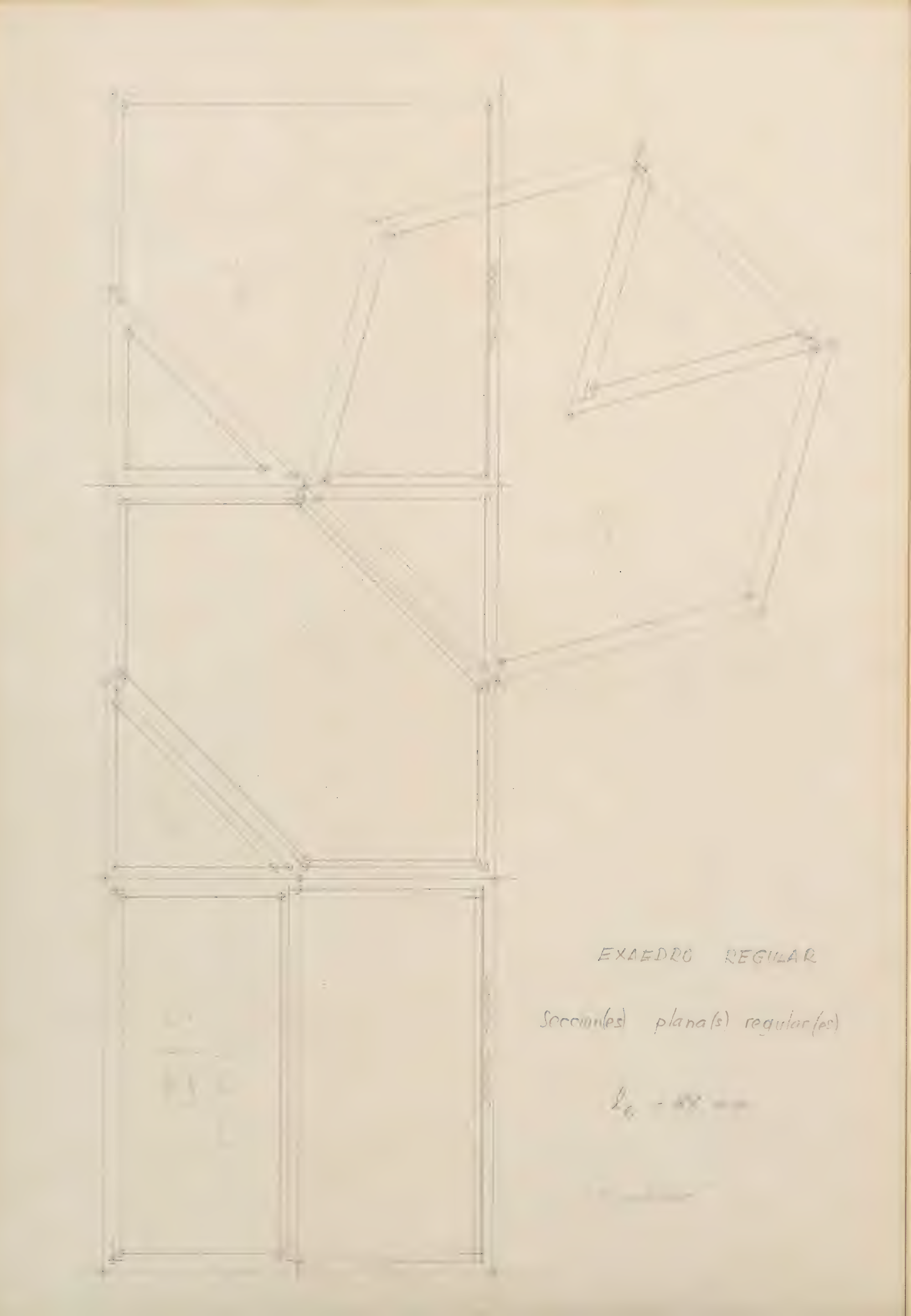


NULO



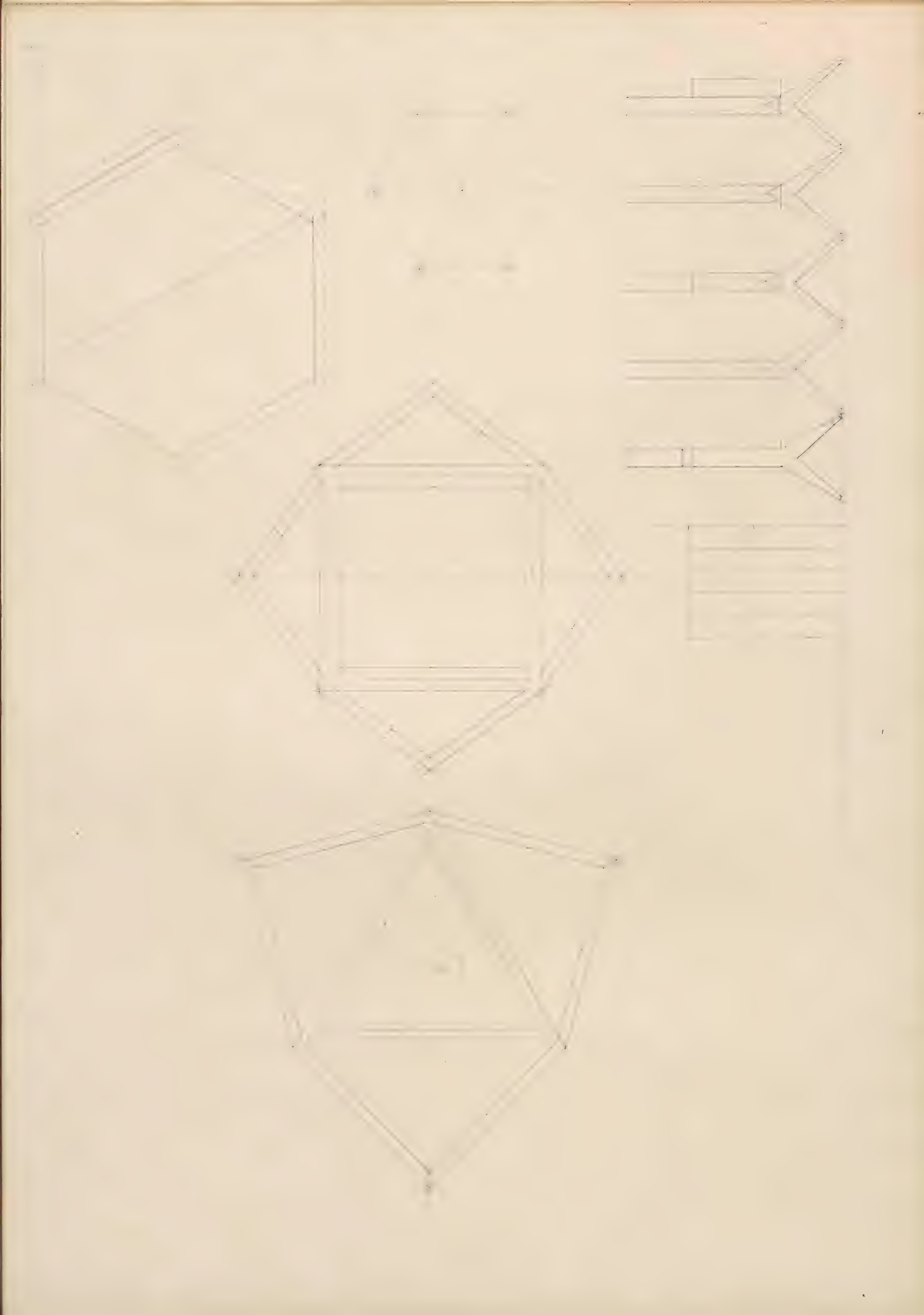
Poliedros regulares convexos conjugados

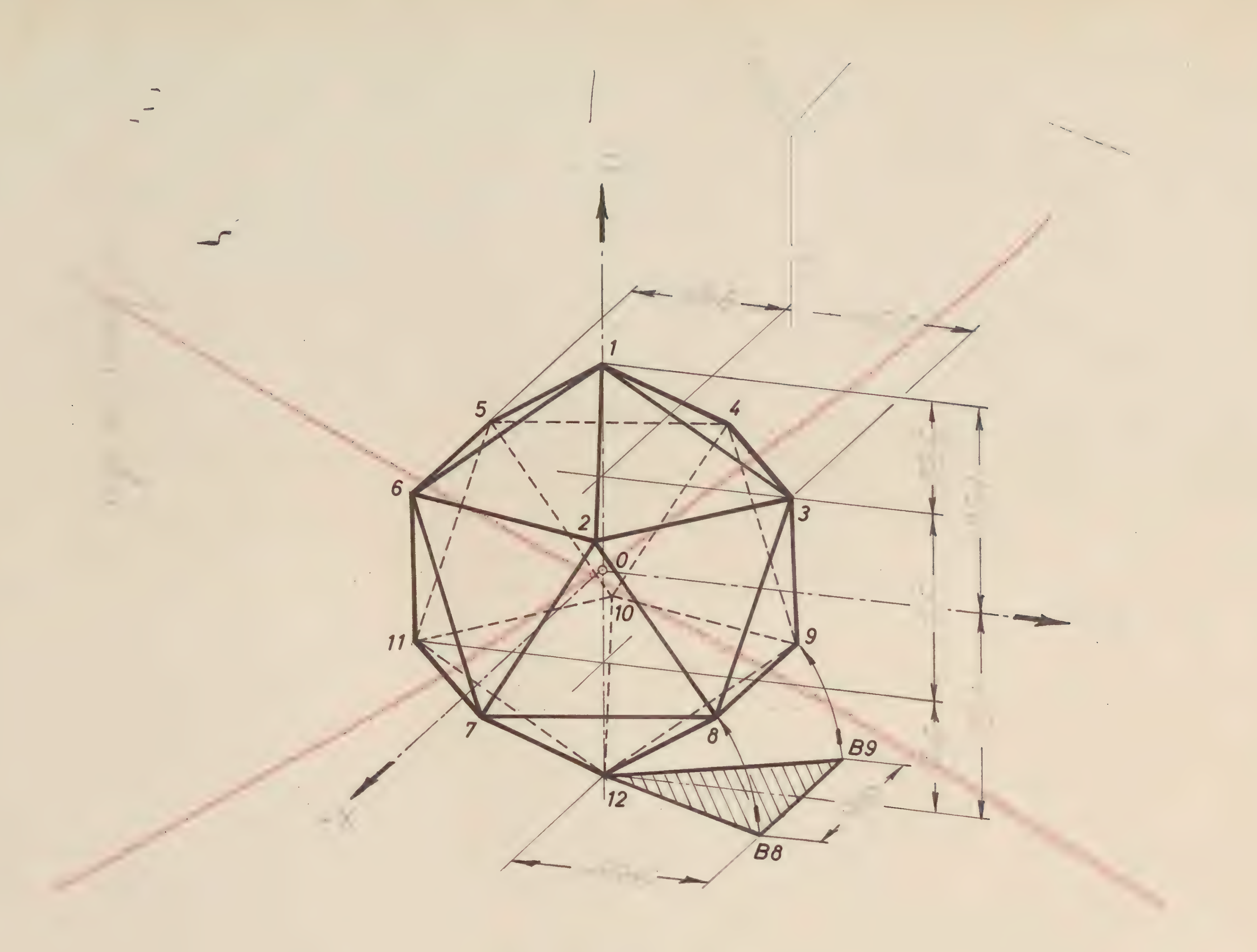



EXAEDRO REGULAR
Seccion(es) plana(s) regular(es)

A) Arquimediano I, inscrito en el tetraedro regular obtenido al prolongar las caras triangulares de dicho arquimediano. - Lado del tetraedro, 124,3 mm

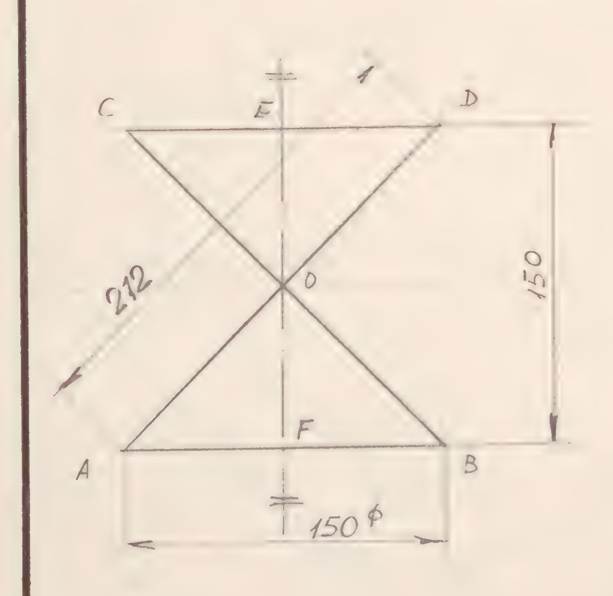
B) Arquimediano I, inscrito en el tetraedro regular obtenido al prolongar las caras exagonales de dicho arquimediano. - Lado del tetraedro, 124,3 mm




1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0
B9
B8


Secciones cónicas (2)

Problemas de Geometría Descriptiva | Secciones cónicas.



$AB = CD = 150\,\phi$ mm

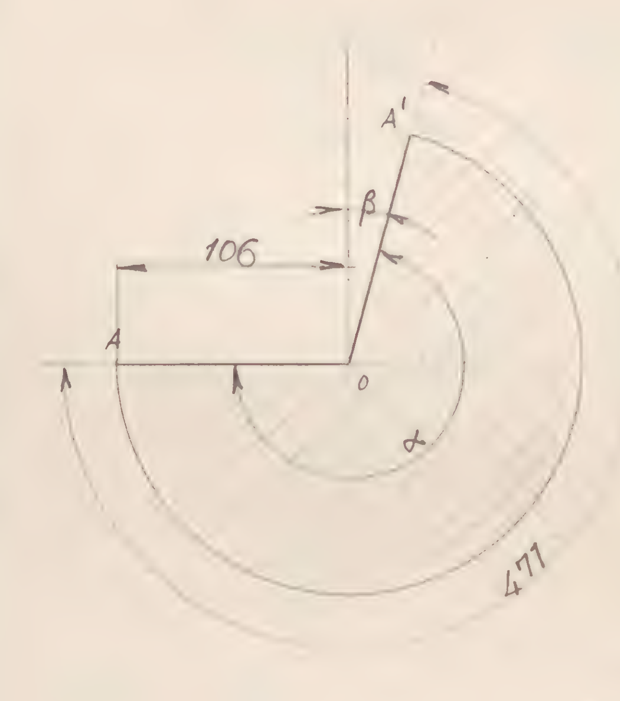
$EF = 150$ mm

$AD = 150 \times \sqrt{2} = 212{,}1$ mm

$AF = FB = CE = ED = 75$ mm

$AO = OD = 106$ mm

$AB \times \pi = 150 \times \pi = 471$ mm



$$\frac{471}{\alpha} = \frac{2\pi\,\overline{OA}}{360} = \frac{666}{360}$$

$$\alpha = \frac{471 \times 360}{666} = 254{,}5946^\circ =$$

$$= 254^\circ\ 35'\ 40{,}6''$$

$\beta = 15^\circ\ 24'\ 19{,}4''$

$\operatorname{tg} \beta = 0{,}27\,54\,46$

(más exacto)

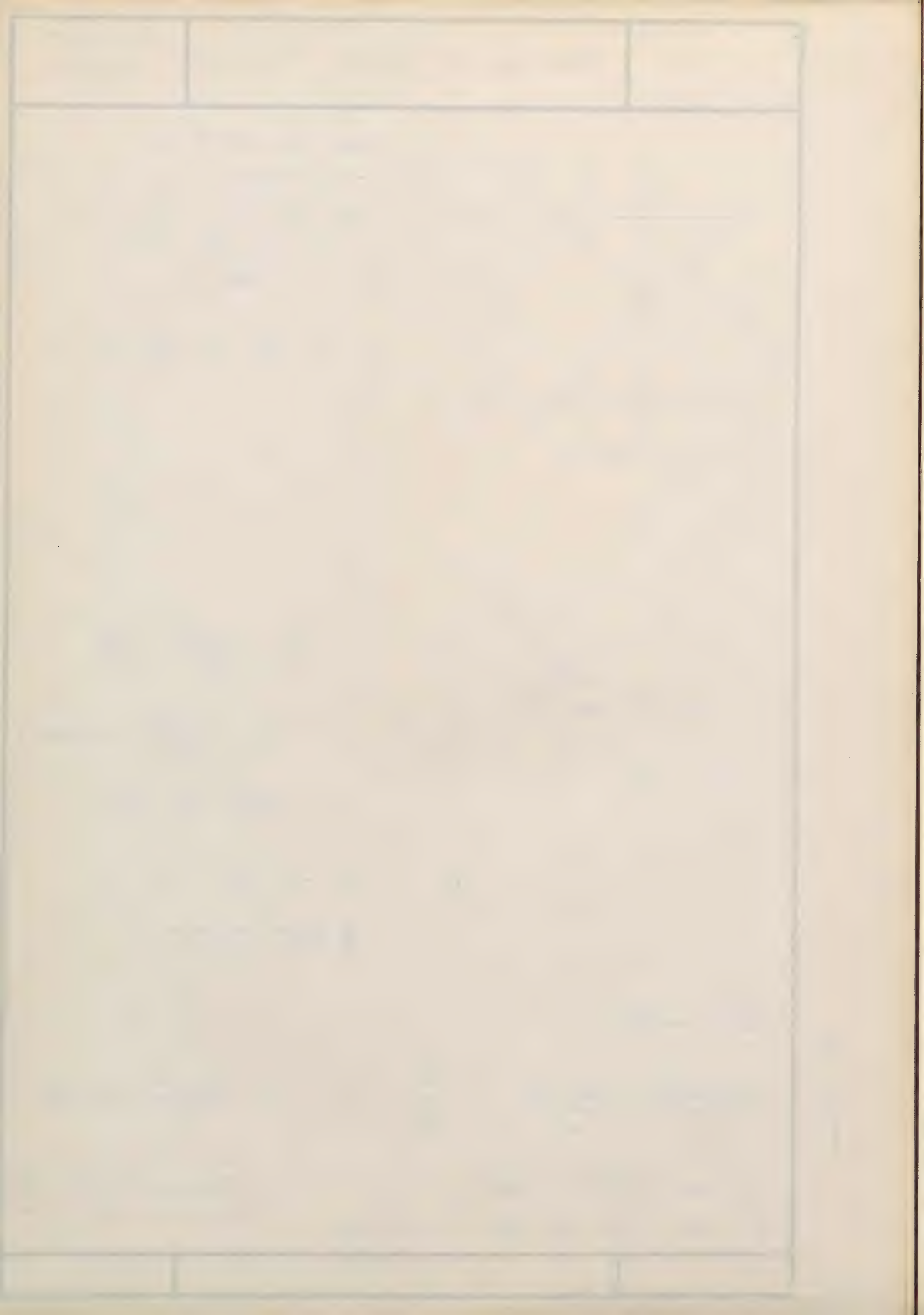
$$\frac{2\pi \times \left(\overline{AF} \cdot \sqrt{2}\right)}{360^\circ} = \frac{2\pi \times \overline{AF}}{\alpha^\circ} \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{360} = \frac{1}{\alpha^\circ} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{360^\circ\ \sqrt{2}}{2} = 180^\circ\ \sqrt{2}$$

$\alpha = 254{,}5578^\circ = 254^\circ\ 33'\ 28''$

$\operatorname{tg} \beta = 0{,}27\,62\,28$

$\beta = 270^\circ - 254^\circ\ 33'\ 28'' = 15^\circ\ 26'\ 32''$

UNE A4 210 X 297



Secciones cónicas (1)


150
150

TETRA - ICOSAEDRO

l_{20} = lado icosaedro = 80 mm.

$2r_1$ = 152,2 mm

$2r_2$ = 121,1 mm

d = 68 mm

5-8 = 47 mm

1'-2' = Apotema cara icosaedro.

1'-6' = 6'-2'

5'-8' paralela a 2'-1'

1'

6

4'

3'

r_1 = 76,1

r_2 = 60,5

$d/2$ = 34

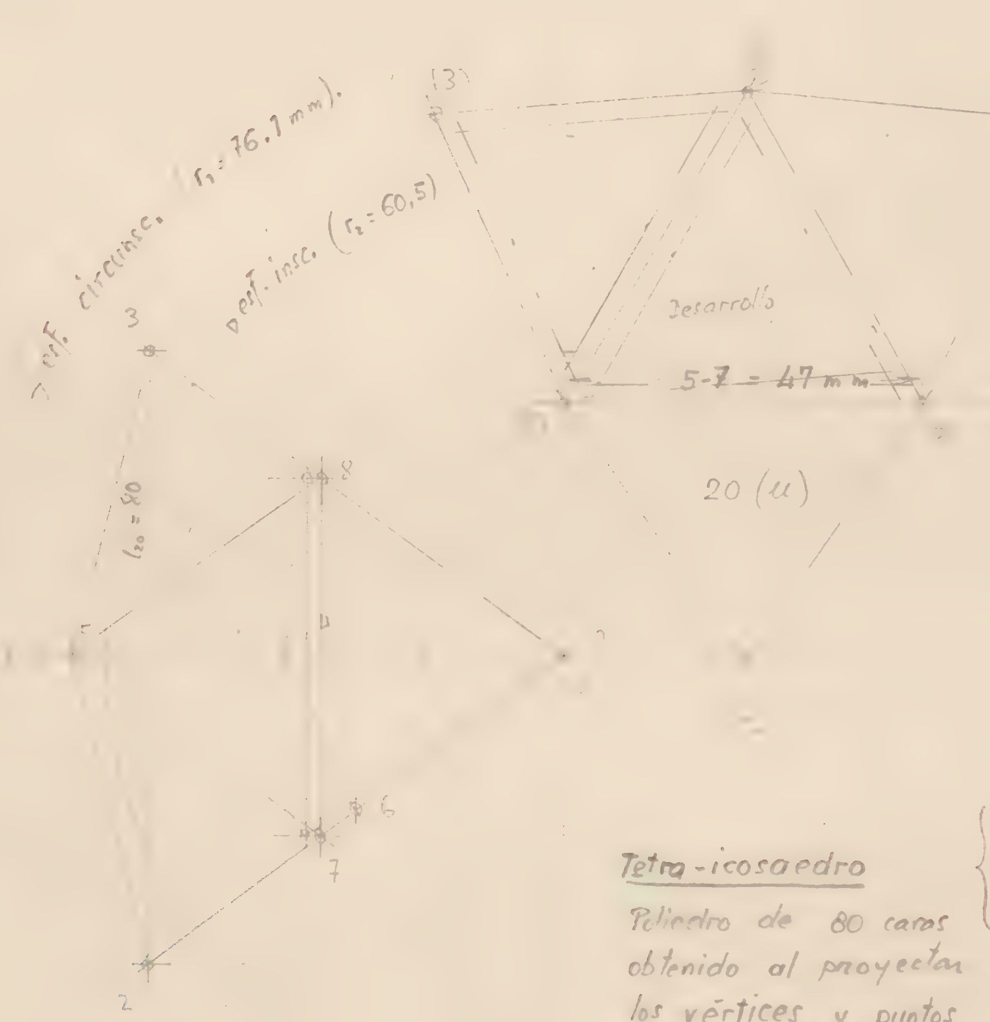
0'

$$r_1 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times l_{20} = 0{,}95\ 10\ 57 \times l_{20}$$

$$r_2 = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times l_{20} = 0{,}75\ 57\ 61 \times l_{20}$$

$$d = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times l_{20} = 0{,}85\ 06\ 51 \times l_{20}$$

$$5\text{-}8 = 8\text{-}7 = 5\text{-}7 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} \cong 0{,}58\ 77\ 85\, l_{20}$$



Caras	=	80
Vértices	=	42
Aristas	=	120

Tetra - icosaedro

Poliedro de 80 caras obtenido al proyectar los vértices y puntos medios de los lados de la cara de un icosaedro regular, sobre la esfera circunscrita y desde su centro.

$$l_{10} = r_1 \frac{\sqrt{5}-1}{2} = l_{20}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}}{8} l_{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}}{8} l_{20} = \frac{\sqrt{60+12\sqrt{5}-20\sqrt{5}-20}}{8} l_{20} = \frac{\sqrt{40-8\sqrt{5}}}{8} l_{20} = \frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} l_{20} =$$

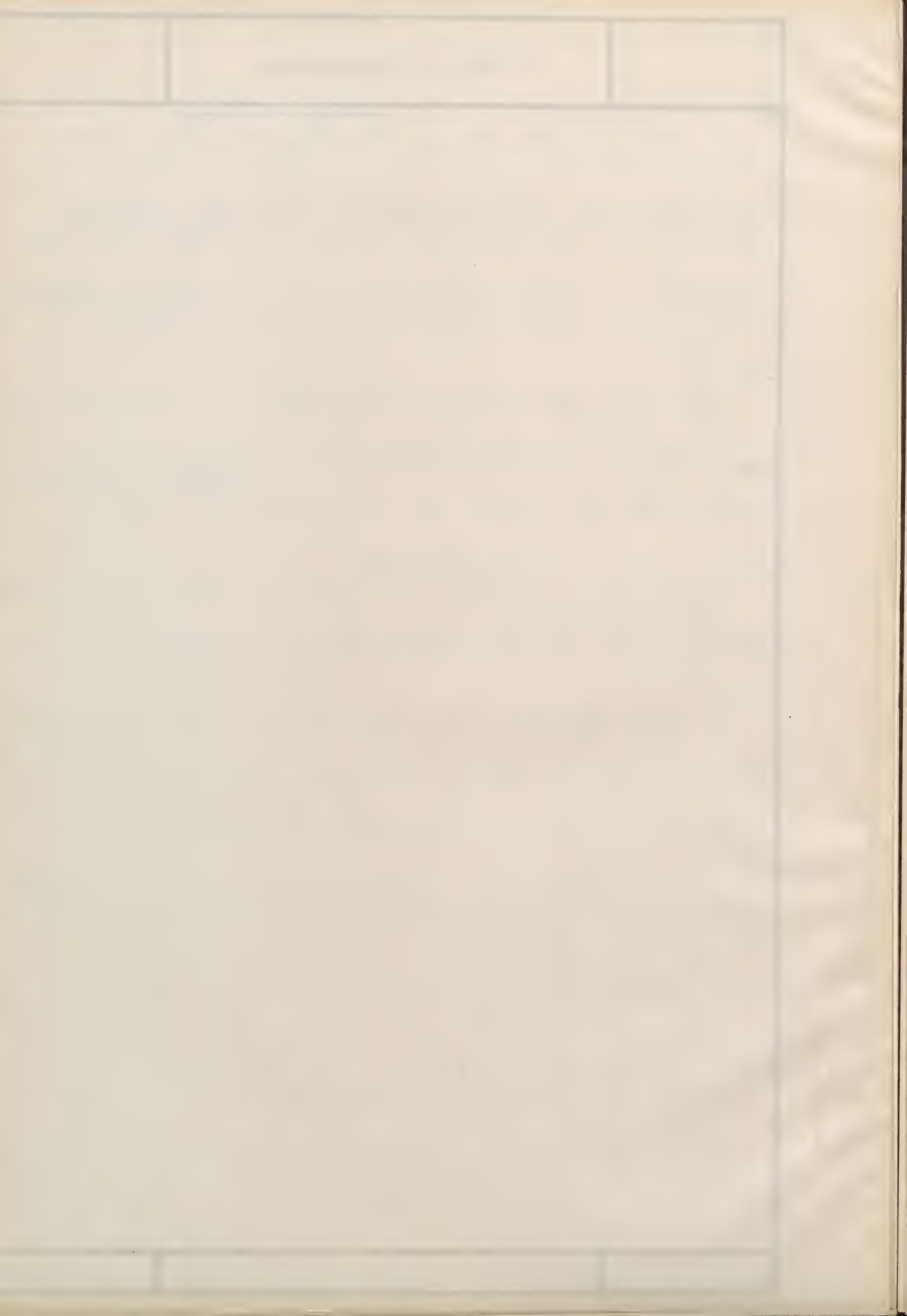
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} l_{20} = \frac{\sqrt{5{,}52\ 78\ 64\ 04\ 50\ 00\ 4}}{4} l_{20} = \frac{2{,}351141}{4} l_{20} = 0{,}58\ 77\ 85\ l_{20}$$

El lado l_{10} del triángulo equilátero 5-7-8, es el lado del decágono regular inscrito en un círculo máximo de la esfera circunscrita de radio r_1. $l_{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} l_{20} = 0{,}58\ 77\ 85..\ l_{20}$

Falta determinar (analíticamente) el valor de uno de los lados iguales del triángulo isósceles adyacente (p.e. 3-8)

La esfera tangente a las caras en forma de triángulos equiláteros es de radio menor que el de la esfera tangente a las caras en forma de triángulos isósceles.

Las caras triangulares equiláteras son paralelas a las del icosaedro regular.



META - ICOSAEDRO

Secciones planas regulares



$l_c = 87,9$ mm

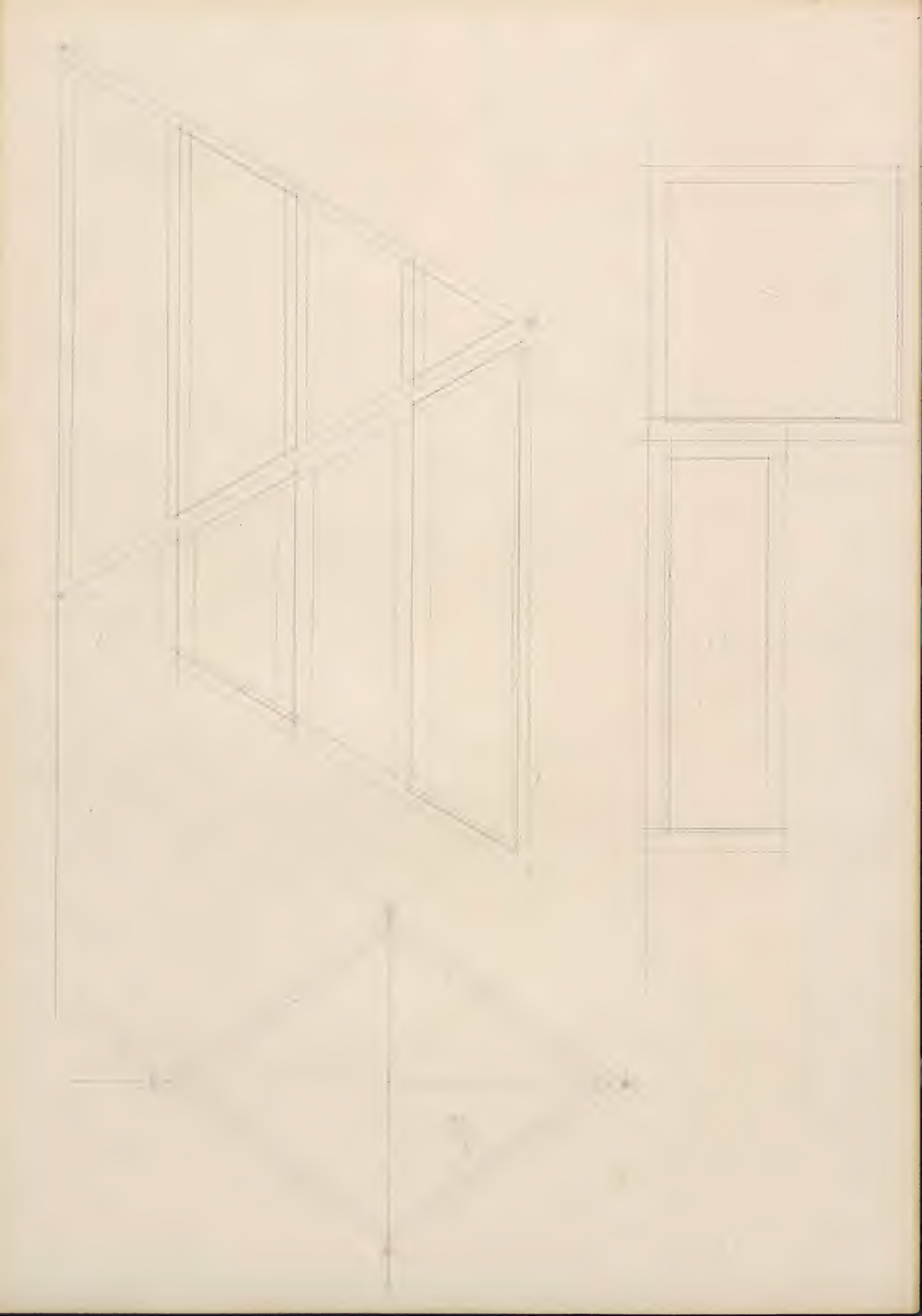
EXAEDRO REGULAR
(CUBO)

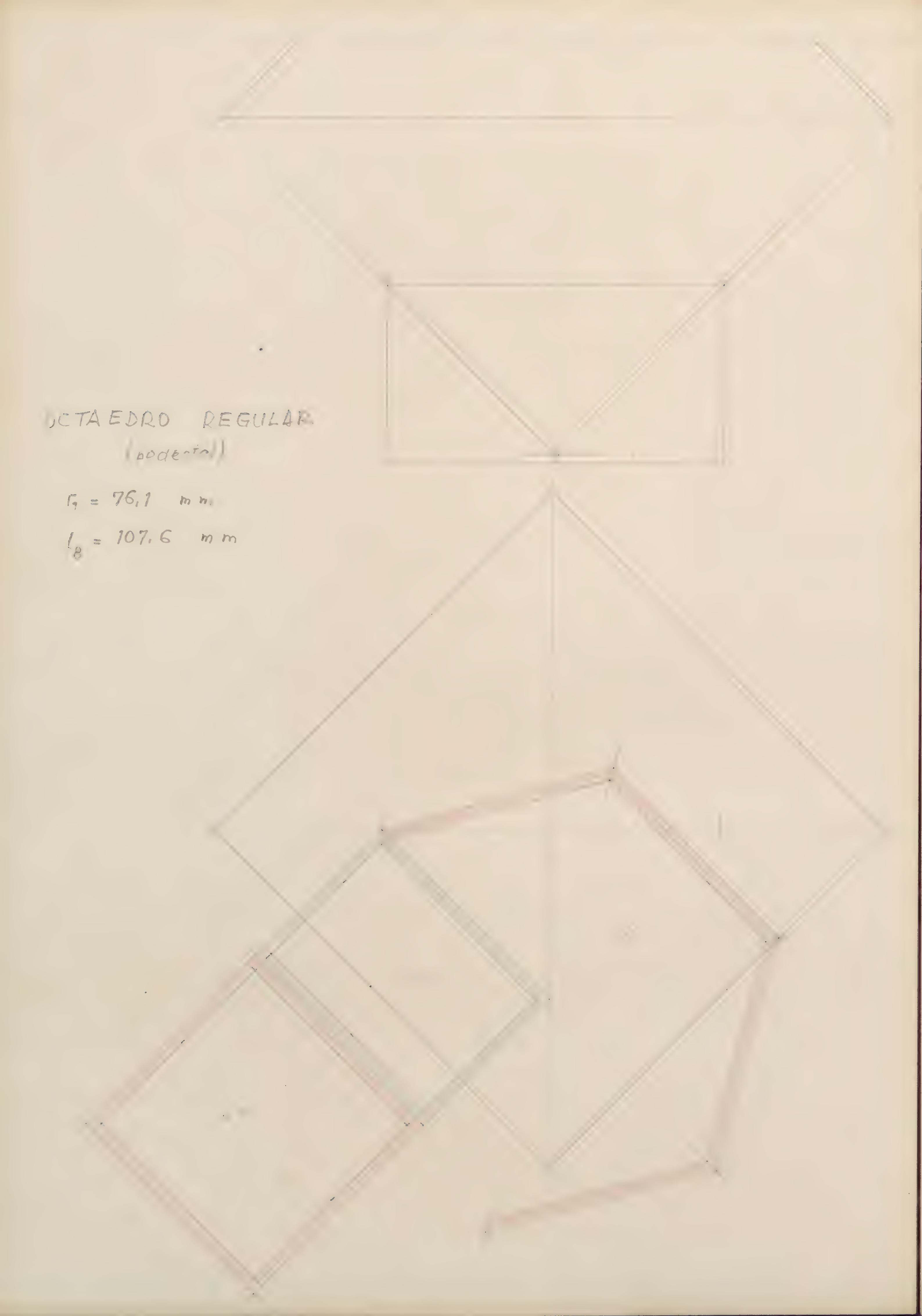
$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_c = 0,866025\, l_c =$
$= 76,1$ mm.

$r_2 = \frac{1}{2} l_c = 44$ mm.

$r_1 = 76,1$

$r_2 = 44$





OCTAEDRO REGULAR
r = 76,1 mm
l_8 = 107,6 mm

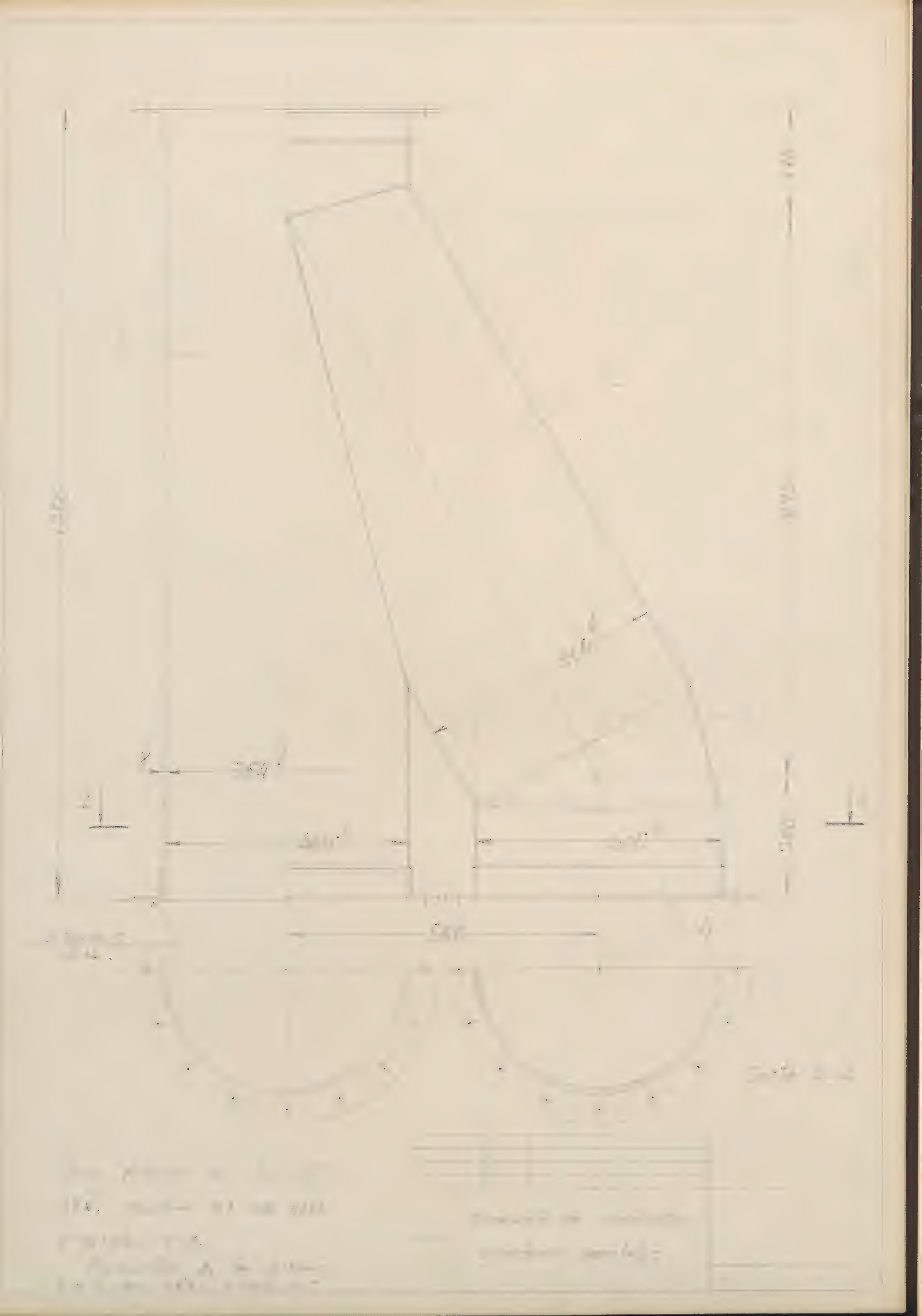
420

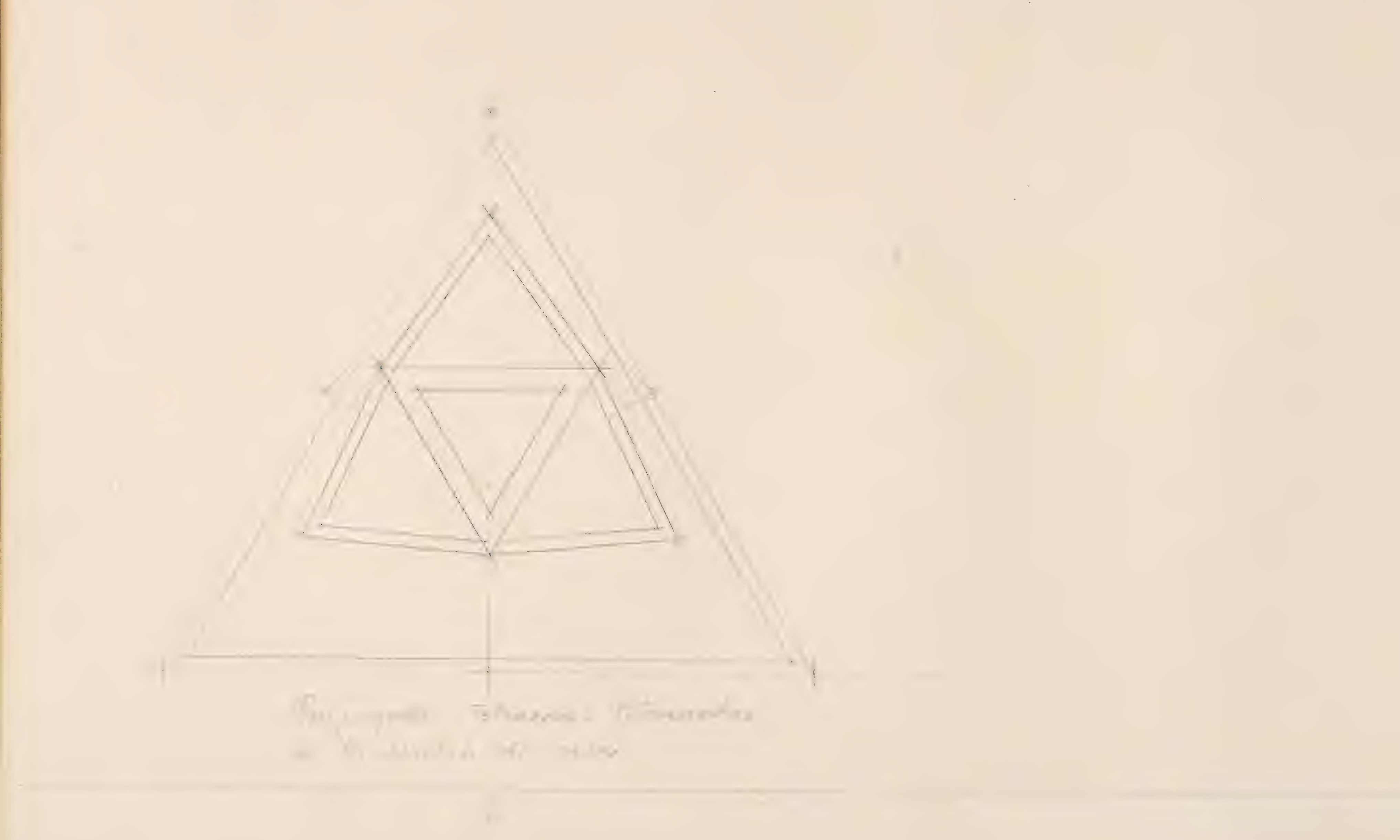
56

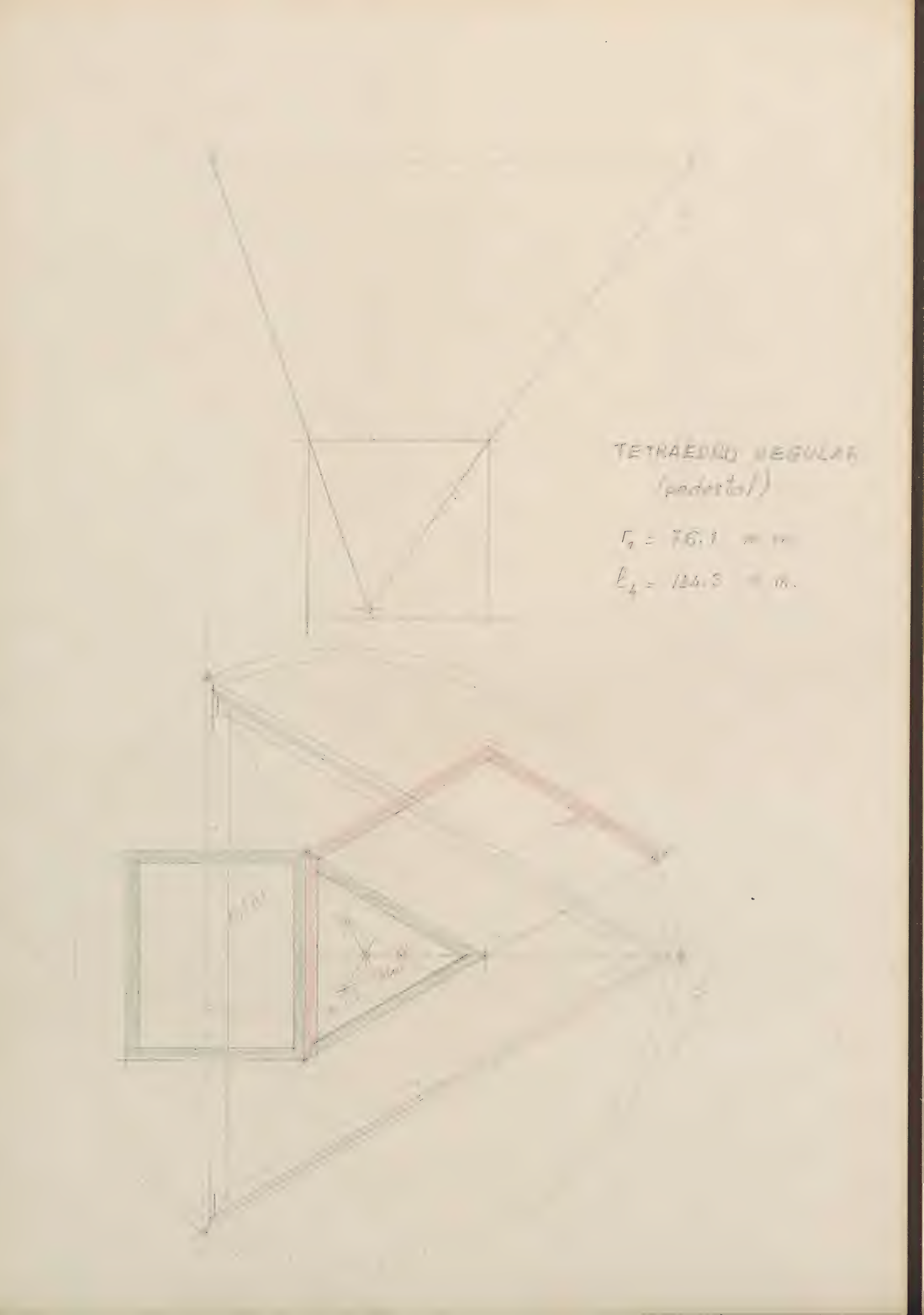
Para [illegible] en [illegible]

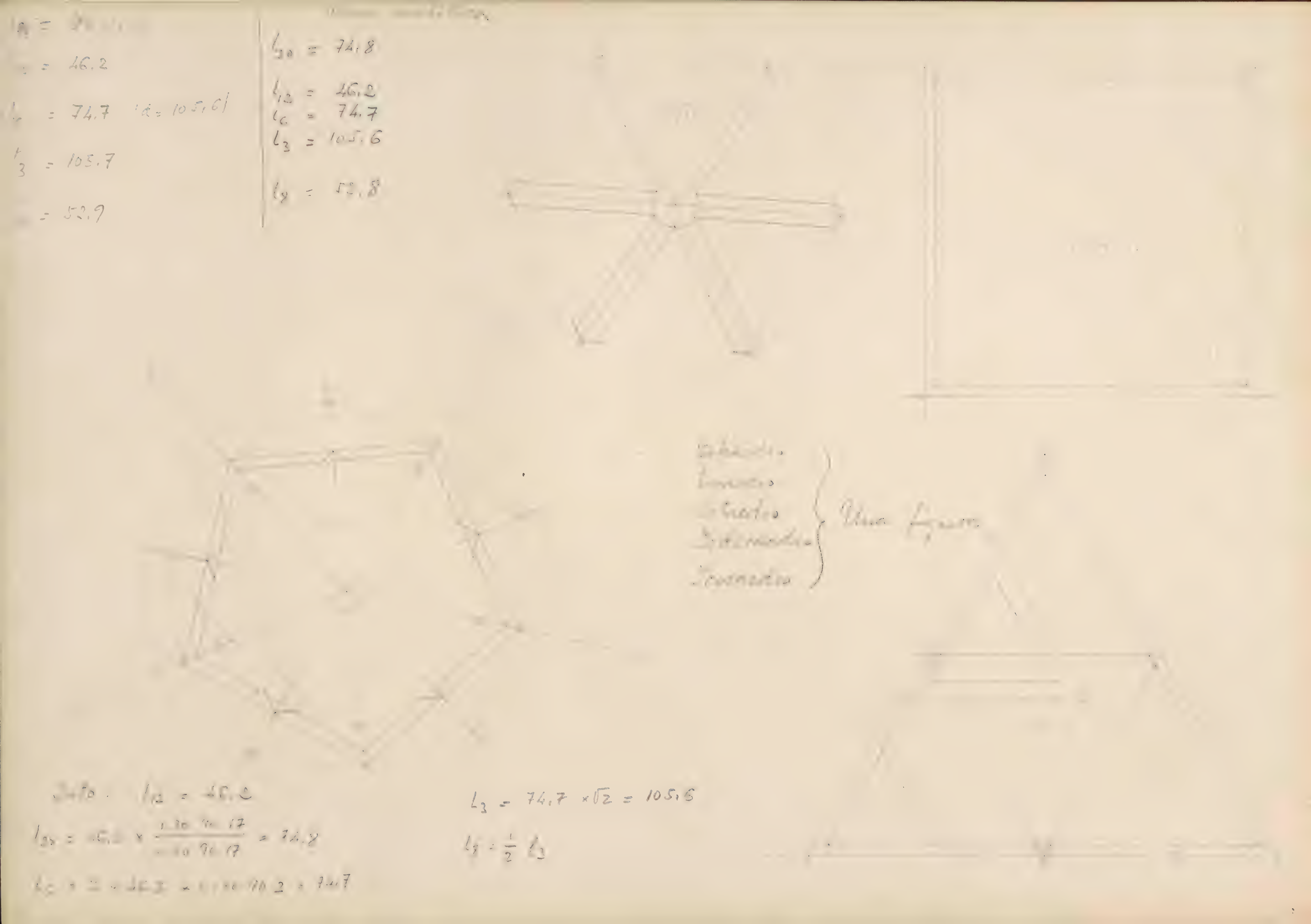
[illegible] carbón K1 DIN 6782

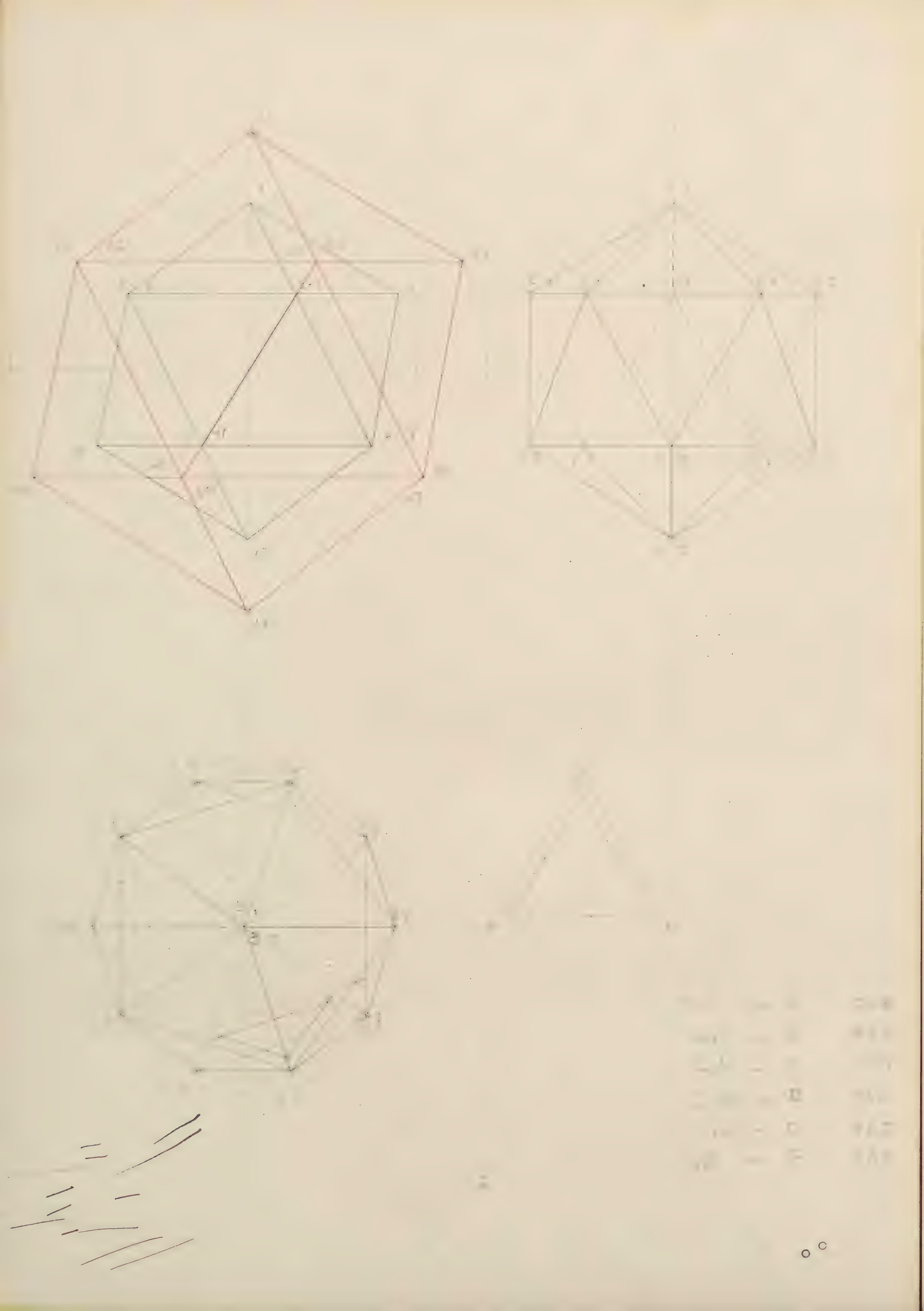
[illegible] y a escala 1:5

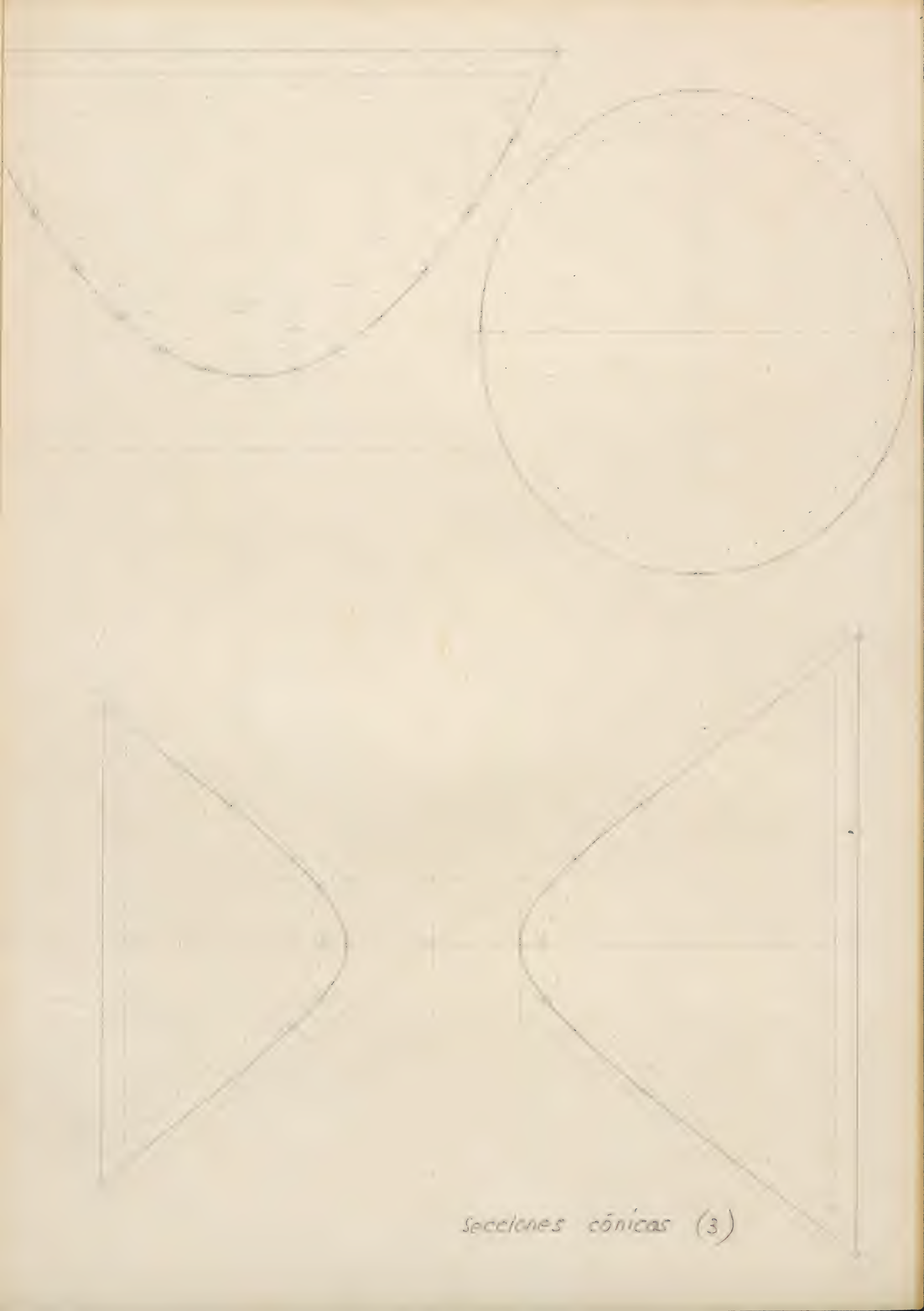





TETRAEDRO REGULAR
(pedestal)
$r_1 = 76.1$ mm
$\ell_4 = 124.3$ mm.


= 46.2
= 74.7 (d = 105.6)
= 105.7
= 52.9
l_{30} = 74.8
l_{12} = 46.2
l_6 = 74.7
l_3 = 105.6
l_4 = 52.8
Una figura
Dato: l_{12} = 46.2
l_3 = 74.7 × $\sqrt{2}$ = 105.6
l_4 = $\frac{1}{2}$ l_3

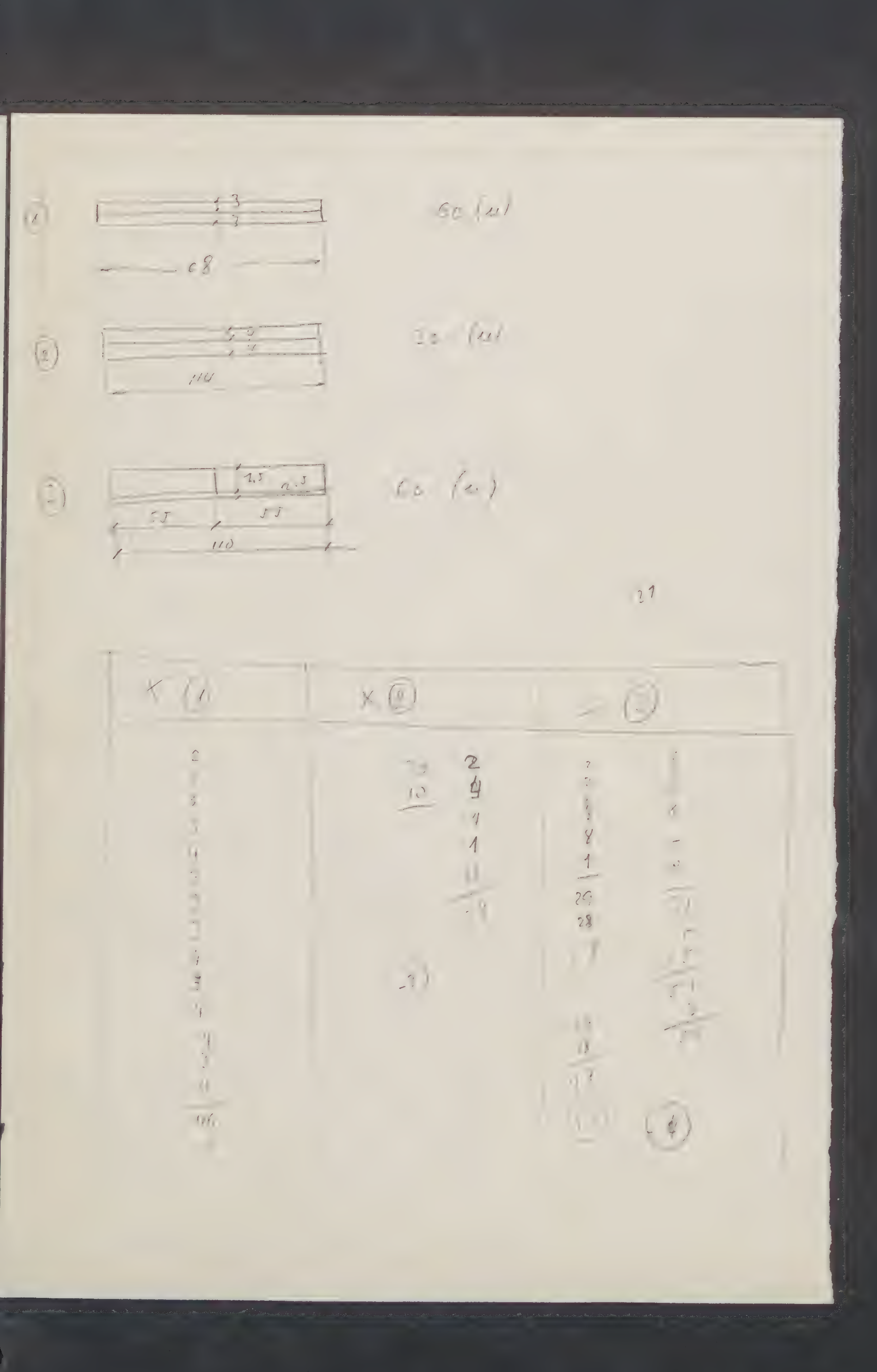



Secciones cónicas (3)

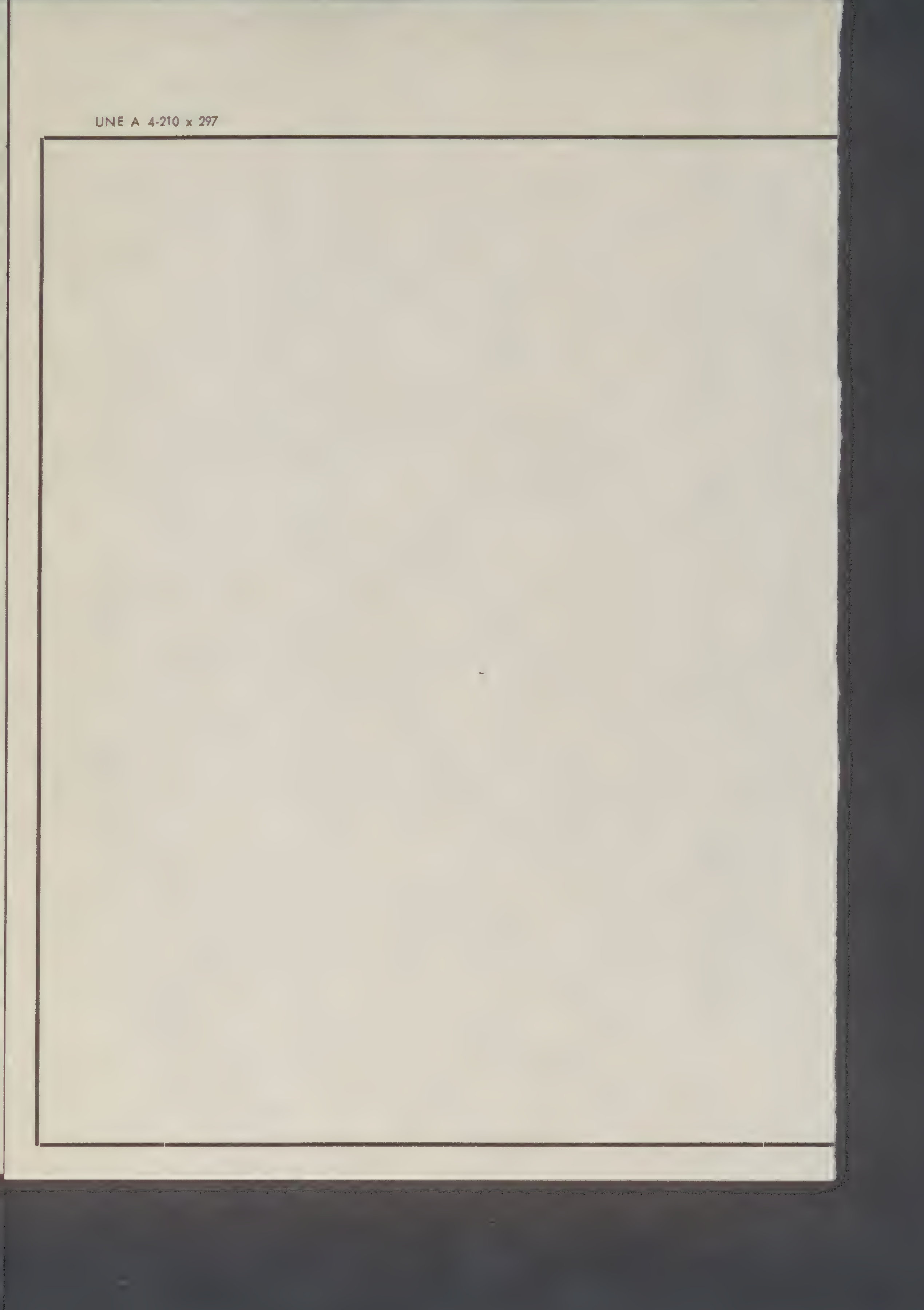


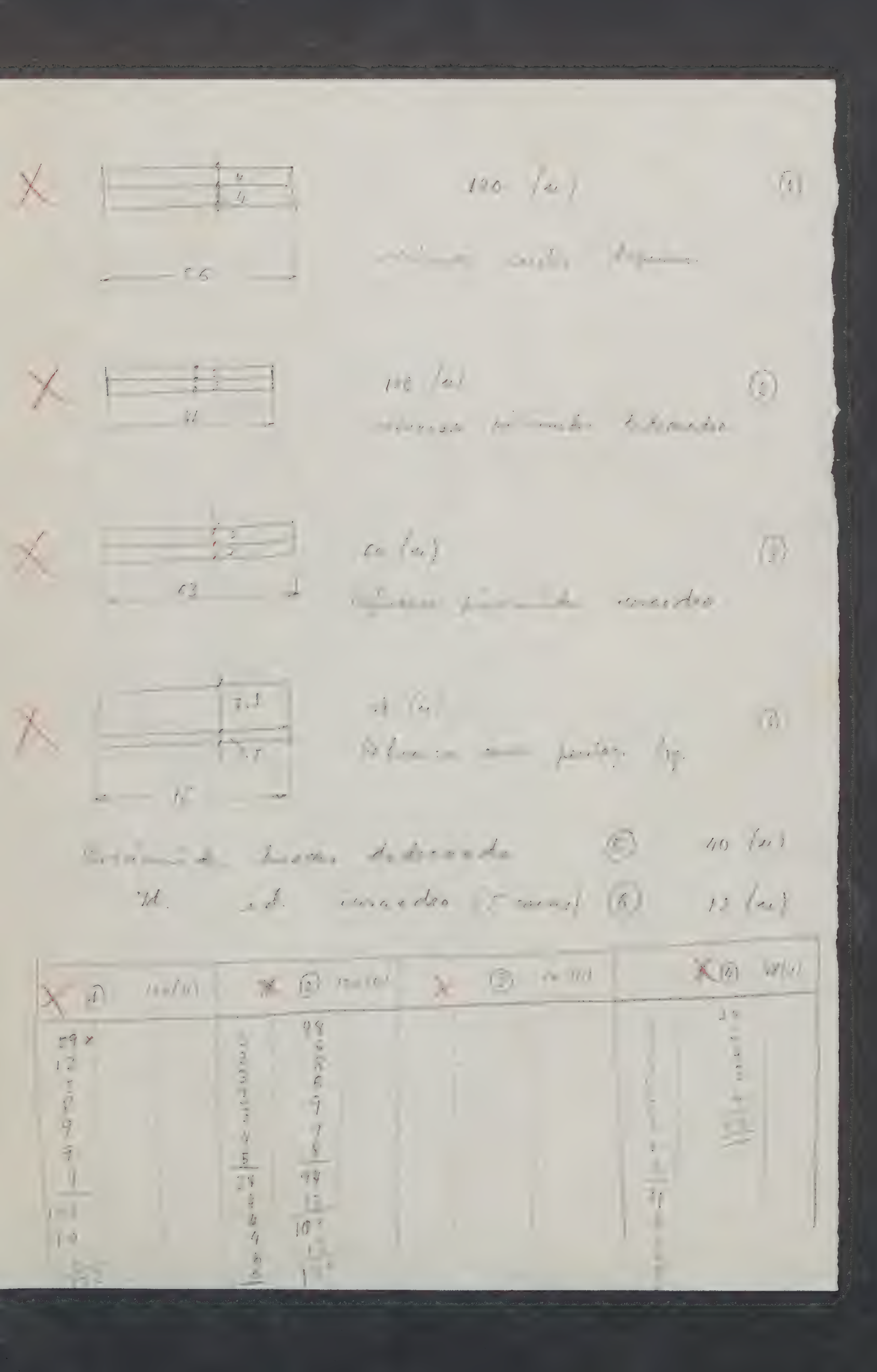
ARQUIMEDIANO IV





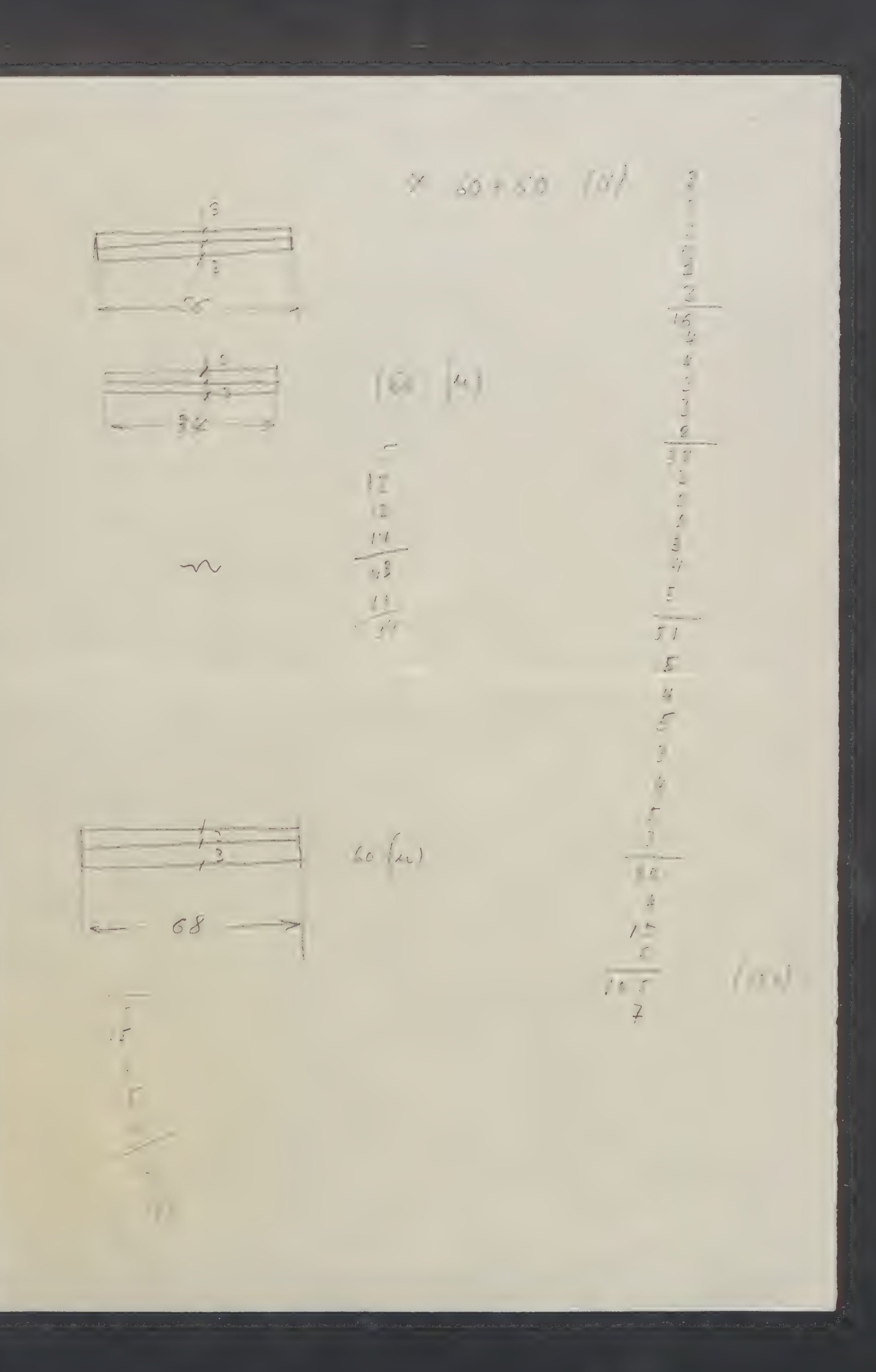
68
110
1,5
2,5
55
55
110

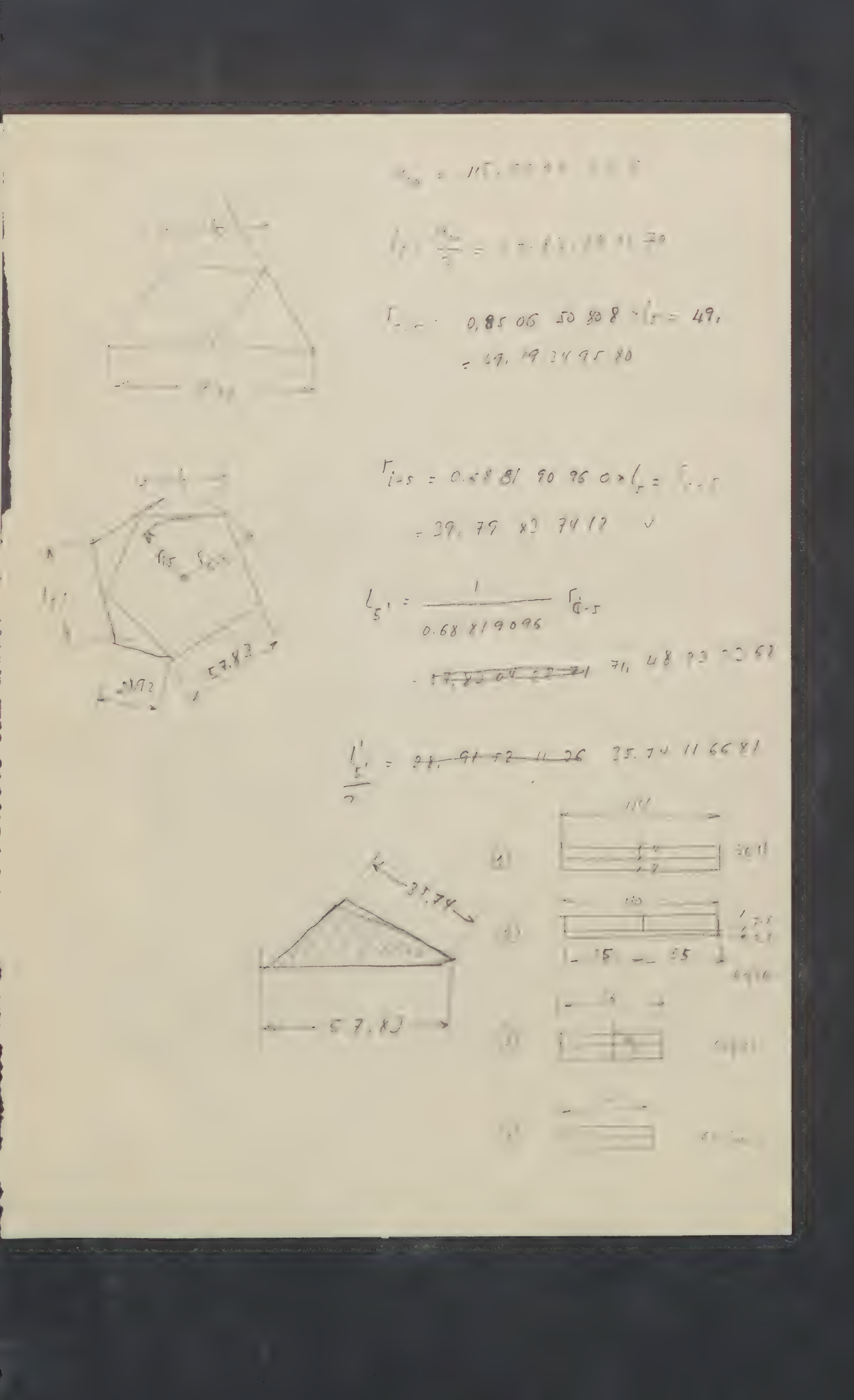


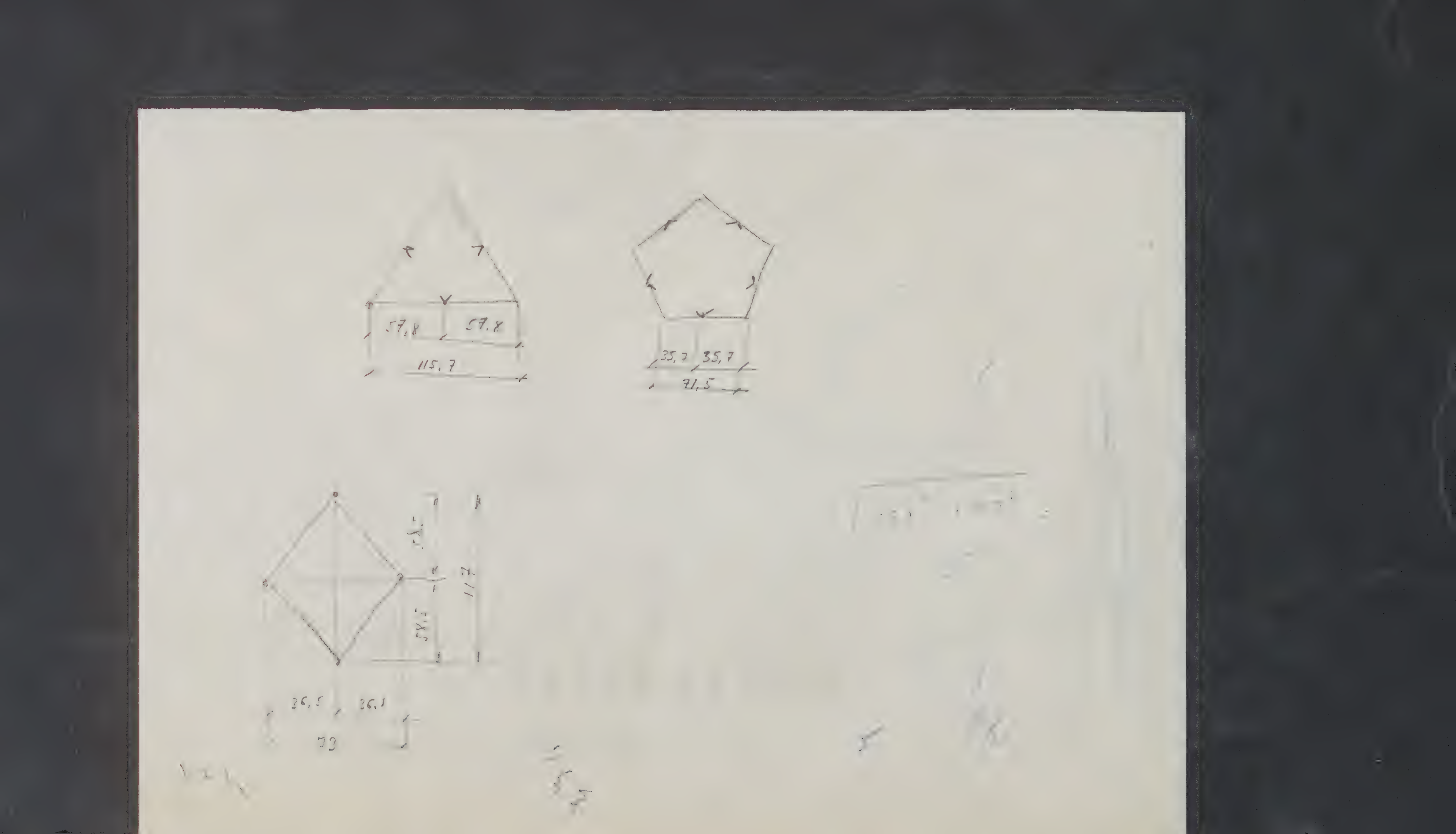


[illegible]

[illegible] 1776


68
60 (in)


0,85 06 50 80 8
= 39. 79 83 74 17
0.68 819096
35.74 11 66 81
57.83
35.74


57,8
57,8
115,7
35,7
35,7
71,5
58,5
58,5
117
36,5
36,5
73

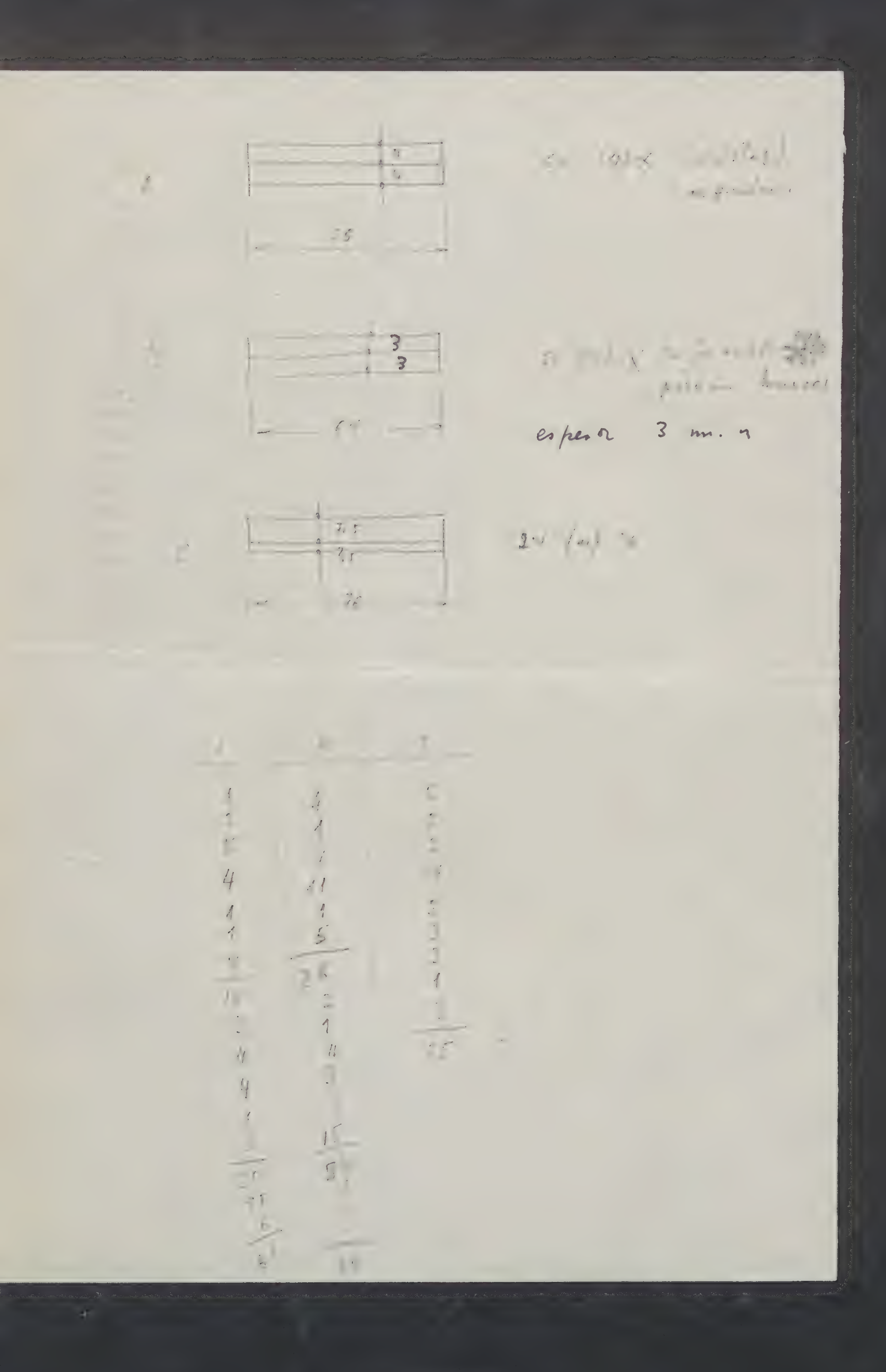
ESTRUCTURAS

EISENBETON

JAIME BALMES - VILLA SAN PABLO
TFNO. 25 03 79
SEVILLA

SU REF.:
N. REF.:

SEVILLA


3
3
espesor 3 mm.

ESTRUCTURAS **EISENBETON**

JAIME BALMES - VILLA SAN PABLO
TFNO. 25 03 79
SEVILLA

Poliedros derivados del dodecaedro e icosaedro regulares convexos conjugados por sus aristas, representados en la lámina # 18

CÁLCULOS ANALÍTICOS

DATO: r_{ec}^{20} = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro regular convexo = 110 mm.

1) a_{20} = Arista del icosaedro regular convexo $= \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\ r_{ec}^{20} =$

$$= 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ r_{ec}^{20} = 1{,}05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 110 = 115{,}66\ 08\ 44\ 6\ldots$$

$$\boxed{a_{20} \cong 115{,}66 \text{ mm}}$$

---

2) l_5 = Lado del triángulo equilátero, inscrito en una cara del icosaedro regular convexo (fig. 1) $= \frac{a_{20}}{2}$

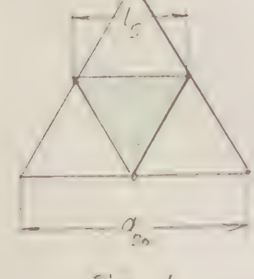


Fig. 1

$$l_5 = \frac{a_{20}}{2} = 57{,}83\ 04\ 22\ 3 \qquad \boxed{l_5 \cong 57{,}83 \text{ mm}}$$

---

3) r_{c-5} = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo de lado l_5 (fig. 2)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_5 = 0{,}85\ 06\ 50\ 80\ 8\ldots \times l_5 = \frac{\sqrt{5}}{5}\ r_{ec}^{20} =$$

$$= 0{,}44\ 72\ 13\ 59\ 5\ldots \times 110 = 49{,}19\ 34\ 95\ 49\ldots$$

$$\boxed{r_{c-5} \cong 49{,}19 \text{ mm}}$$

Figura 2

UNE A 4-210 x 297

Calvanz

4) $\underline{r_{i-5}}$ = Radio de la circunferencia inscrita al pentágono regular convexo de lado l_5 (fig. 2)

$$\underline{r_{i-5}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_5 = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{40}} \times 110 = \underline{39{,}79\ 83\ 73\ 87\ldots}$$

$$\boxed{r_{i-5} \simeq 39{,}80 \text{ mm}}$$

---

5) $\underline{l_5^{I}}$ = Lado del pentágono regular convexo, cuya circunferencia inscrita tiene por radio r_{c-5} (Fig. 3)

o sea

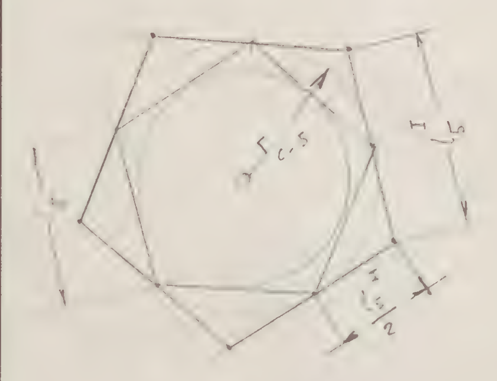


Figura 3

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_5^{I} \qquad \text{de donde:}$$

$$\underline{l_5^{I}} = \frac{r_{c-5}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}}\; r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= 0{,}64\ 98\ 39\ 39\ 3\ldots \times 110 = \underline{71{,}48\ 23\ 33\ 23\ldots}$$

$$\boxed{l_5^{I} \simeq 71{,}48 \text{ mm}}$$

---

6) Semilado del pentágono anterior (Fig. 3) : $\frac{l_5^{I}}{2}$

$$\underline{\frac{l_5^{I}}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}{2}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \times 110 = 35{,}74\ 11\ 66\ 62\ldots$$

$$\boxed{l_5^{I} : 2 \simeq 35{,}74 \text{ mm}}$$

[illegible] [illegible] - 1973

7) r^{I}_{c-5} = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo de lado l_5^{I}

$$r^{I}_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5^{I} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \times r^{20}_{ec} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(3-\sqrt{5})}{5}}\; r^{20}_{ec} = 0{,}55\;27\;86\;40\;5\ldots \times 110 = \underline{60{,}80\;65\;04\;52\ldots}$$

$$\boxed{r^{I}_{c-5} \simeq 60{,}81 \text{ mm}}$$

---

8) a_{IV} = Arista del Arquimediano IV = l_5 = 57,83 04 22 3... mm

---

9) r^{IV}_{ec} = Radio de la esfera circunscrita al Arquimediano IV

$$r^{IV}_{ec} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{IV} = 1{,}61\;80\;33\;98\;9\ldots \times 57{,}83\;04\;22\;3 =$$

$$= 93{,}57\;15\;88\;88\ldots \text{ mm.}$$

$$\boxed{r^{IV}_{ec} \simeq 93{,}57 \text{ mm}}$$

---

10) r^{20}_{et} = Radio de la esfera tangente a las aristas del icosaedro regular convexo de arista a_{20} = 115,66 08 44 6...

$$r^{20}_{et} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\, a_{20} = 0{,}80\;90\;16\;99\;4\ldots \times 115{,}66\;08\;44\;66 = 93{,}57\;15\;88\;88$$

de donde $\boxed{r^{20}_{et} = r^{IV}_{ec}}$

UNE A 4·210 x 297

11) $r^{IV}_{e-t(3)}$ = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares del Arquimediano IV, de arista $a_{IV} = 57,83\ 04\ 22\ 3...$

$$r^{IV}_{e-t(3)} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\,a_{IV} = 1,51\ 15\ 22\ 52\ 8... \times 57,83\ 04\ 22\ 3... =$$

$$= 87,41\ 19\ 91\ 89...$$

$$\boxed{r^{IV}_{e-t(3)} \simeq 87,41 \text{ mm}}$$

---

12) r^{20}_{e-t} = Radio de la esfera tangente a las caras del icosaedro regular convexo de arista $a_{20} = 115,66\ 08\ 44\ 6...$

$$r^{20}_{e-t} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times a_{20} = 0,75\ 57\ 61\ 31\ 4... \times 115,66\ 08\ 44\ 6... =$$

$$= 87,41\ 19\ 91\ 89... \text{ mm}$$ de donde

$$\boxed{r^{IV}_{e-t(3)} = r^{20}_{e-t}}$$

---

13) $r^{IV}_{e-t(5)}$ = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediano IV, de arista $a_{IV} = 57,83\ 04\ 223...$

$$r^{IV}_{e-t(5)} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times a_{IV} = 1,37\ 63\ 81\ 92\ 0... \times 57,83\ 04\ 22\ 3... =$$

$$= 79,59\ 67\ 47\ 68....$$

$$\boxed{r^{IV}_{e-t(5)} \simeq 79,60 \text{ mm}}$$

UNE A 4-210 x 297

14) a_{12} = Arista del dodecaedro regular convexo, en el que el radio de su esfera inscrita es de $r^{12}_{e-i} = r^{IV}_{e-t(5)}$, o sea el del radio de la esfera tangente a las caras pentagonales del Arquimediano IV, de arista a_{IV} = 57, 83 04 22 3... mm.

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}} \times a_{IV} = 0{,}89\ 80\ 55\ 95\ 4.. \times 79.\ 59\ 67\ 47\ 68$$

$$= 71{,}\ 48\ 23\ 33\ 23 \ldots$$ de donde

$$a_{12} \cong 71.48 \text{ mm}$$

$$\boxed{a_{12} = l^{I}_{5}}$$



POLIEDROS

REGULARES

Constantes numéricas

Aristas de los poliedros regulares inscritos en una esfera de radio $r_c = 110$ mm.

179,6 mm $\quad a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \times 110 = 1{,}632993162 \times 110 = 179{,}6292478$

127 " $\quad a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 110 = 1{,}154700539 \times 110 = 127{,}0170593$

155,6 " $\quad a_8 = \sqrt{2} \times 110 = 1{,}414213562 \times 110 = 155{,}5634918$

78,5 " $\quad a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \times 110 = 0{,}713644179 \times 110 = 78{,}50085969$

115,7 " $\quad a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times 110 = 1{,}051462224 \times 110 = 115{,}6608446$

UNE A4 210 x 297

Cuadro resumen del cálculo de manitudes en los cinco poliedros regulares convexos

1. TETRAEDRO $n = 4$

	Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
r^n_{ec} →	a (r^4_{ec})	$\frac{\sqrt{6}}{4}\,\ell$ (a_4)	0, 61 23 72.... ℓ
r^n_{ef} →	b	$\frac{\sqrt{2}}{4}\,\ell$	0, 35 35 53.... ℓ
r^n_{ei} →	c	$\frac{\sqrt{6}}{12}\,\ell$	0, 20 41 24.... ℓ
r_{c-3} →	d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell$	0, 57 73 50.... ℓ
ℓ_n	2φ	$\text{sen}\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0, 57 73 50 $2\varphi = 70°\ 31'\ 43{,}4''$
	–	–	–
	–	–	–
	–	–	–
	h	$\frac{\sqrt{6}}{3}\,\ell$	0. 81 64 97.... ℓ
	–	–	–
$r_{1.3}$	k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\,\ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S_n	S	$\sqrt{3}\ \ell^2$	1, 73 20 51.... ℓ^2
V_n	V	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,\ell^3$	0. 11 78 51.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$h = a + c$ $h = \frac{4}{3}a$ $h = 4c$
$a = 3c$ $d = 2k$

2. EXAEDRO $n = 6$

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a_6 (r^6_{ec})	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$	0, 86 60 25.... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	0, 70 71 07.... ℓ
c	$\frac{1}{2}\,\ell$	0, 50 00 00.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	0, 70 71 07.... ℓ
2φ	$\text{sen}\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0, 70 71 07.... ℓ $2\varphi = 90°\ 00'\ 00''$
–	–	–
–	–	–
–	–	–
h	$1\ \ell$	1, 00 00 00.... ℓ
–	–	–
k	$\frac{1}{2}\,\ell$	0, 50 00 00.... ℓ
S	$6\ \ell^2$	6. 00 00 00.... ℓ^2
V	$1\ \ell^3$	1. 00 00 00.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$c = k$ $b = d$ $h = 2$[illegible] $h = 2k$

3. OCTAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	0, 70 71 07.... ℓ
b	$\frac{1}{2}\,\ell$	0, 50 00 00.... ℓ
c	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,\ell$	0, 40 82 48.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	$\text{sen}\,\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	0, 81 64 97.... ℓ $2\varphi = 109°\ 28'\ 16{,}6''$
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\,\ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$2\sqrt{3}\ \ell^2$	3, 46 41 02.... ℓ^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,\ell^3$	0, 47 14 05.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$d = 2k$ $\ell = 2b$

4. DODECAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\,\ell$	1, 40 12 59.... ℓ
b	$\frac{3 + \sqrt{5}}{4}\,\ell$	1, 30 90 17.... ℓ
c	$\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\,\ell$	1, 11 35 16.... ℓ
d	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0. 85 06 51.... ℓ
2φ	$\text{sen}\,\varphi = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$	0, 85 06 51.... ℓ $2\varphi = 116°\ 33'\ 54{,}2''$
e	$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	1, 37 63 82.... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 52 57 31.... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0. 85 06 51.... ℓ
–	–	–
i	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 85 06 51.... ℓ
k	$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\,\ell$	0, 68 81 91.... ℓ
S	$3 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\ \ell^2$	20, 64 57 29.... ℓ^2
V	$\frac{7\sqrt{5} + 15}{4}\,\ell^3$	7, 66 31 19.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$e = 2k$ $d = g = i$ $g + f = 2k$

5. ICOSAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\,\ell$	0, 95 10 57.... ℓ
b	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\,\ell$	0, 80 90 17.... ℓ
c	$\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\,\ell$	0, 75 57 61.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	$\text{sen}\,\varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$	0, 93 41 72.... $2\varphi = 138°\ 11'\ 22{,}8''$
e	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 85 06 51.... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 85 06 51.... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 52 57 31.... ℓ
h	$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\,\ell$	0, 68 81 91.... ℓ
i	$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\,\ell$	0, 52 57 31.... ℓ
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\,\ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$5\sqrt{3}\ \ell^2$	8, 66 02 54.... ℓ^2
V	$\frac{15 + 5\sqrt{5}}{12}\,\ell^3$	2, 18 16 95.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$g = i$ $2k = d$ $e = f$ $g + f = 2h$

POLIEDROS REGULARES

ICOSAEDRO REGULAR.- $C = 20$; $V = 12$; $A = 30$

20 triángulos equiláteros de 80 mm. de lado.

Radio de la esfera circunscrita $= r_1 = \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} =$

$0.95\ 10\ 57 \ldots\ l_{20} = 76,085$ mm.

Angulo diedro de dos caras consecutivas $= 138°\ 11'\ 22,75''$

DODECAEDRO REGULAR.- $C = 12$; $V = 20$; $A = 30$

12 pentágonos regulares de 54,3 mm. de lado.

Radio de la esfera circunscrita $= r_1 = \dfrac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} =$

$1,40\ 12\ 59 \ldots\ l_{12} = 76,1$ mm.

Angulo diedro de dos caras consecutivas $= 116°\ 33'\ 54,2''$

OCTAEDRO REGULAR.- $C = 8$; $V = 6$; $A = 12$

8 triángulos equiláteros de 107,6 mm de lado

Radio de la esfera circunscrita $= r_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 =$

$= 0,70\ 71\ 05 \ldots\ l_8 = 76,1$ mm

Angulo diedro de dos caras consecutivas $= 109°\ 28'\ 16.4''$

EXAEDRO REGULAR.- $C = 6$; $V = 8$; $A = 12$

6 cuadrados de 87,9 mm de lado

Radio de la esfera circunscrita $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 =$

$= 0.\ 86\ 60\ 25 \ldots\ l_6 = 76,1$ mm

Angulo diedro de dos caras consecutivas $= 90°$

TETRAEDRO REGULAR.- $C = 4$; $V = 4$; $A = 6$

4 triángulos equiláteros de 124,3 mm de lado

Radio de la esfera circunscrita $= \dfrac{\sqrt{6}}{4}\, l_4 =$

$= 0,\ 61\ 23\ 72 \ldots\ l_4 = 76,1$ mm.

Angulo diedro de dos caras $= 70°\ 31'\ 43,6''$

Los valores de los diedros del octaedro y tetraedro regulares, son suplementarios:

$$\begin{array}{r} 109°\ 28'\ 16,4'' \\ +\ 70°\ 31'\ 43,6'' \\ \hline 180° \end{array}$$

UNE A4 210 X 297

colorchecker CLASSIC

calibrite

mm